Matematyka dla maturzystów

dr Barbara Wolnik   Witold Bołt

23 marca 2005

Spis treści

Rozdział 1

Funkcja liniowa

1.1 Pojęcia podstawowe.

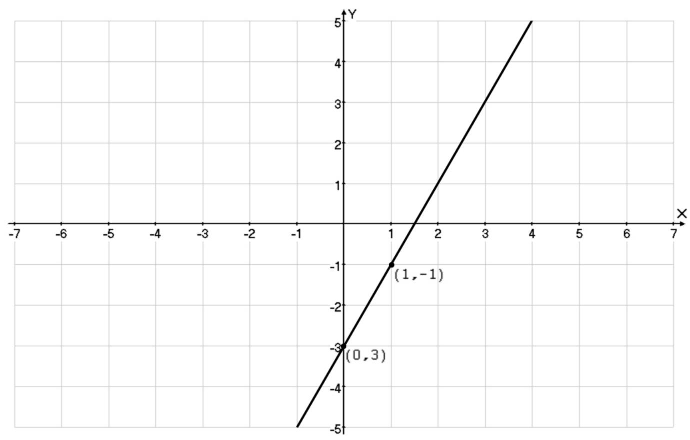
Definicja 1.1 (funkcja liniowa)**.** Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem: $f(x) = ax + b$ nazywamy liniową.

Uwaga 1.2. W definicji funkcji liniowej ważne jest to, że dziedziną tej funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych (zwróć uwagę na zapis $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, czy wiesz co on oznacza?). Na przykład funkcja dana wzorem: $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$, choć daje się sprowadzić do wzoru funkcji liniowej $f(x) = x + 2$, to jednak nie jest funkcją liniową gdyż jej dziedziną jest $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Z drugiej strony, jeśli podany jest jedynie wzór funkcji, to przyjmujemy, że jej dziedziną jest tzw. dziedzina naturalna, czyli zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których ten wzór ma sens.

1.2 Wykres funkcji liniowej.

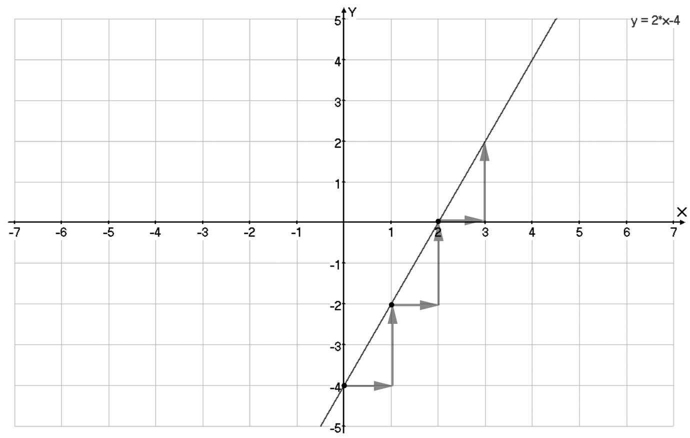
Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest linia prosta o równaniu $y = ax + b$. Aby narysować wykres funkcji $f(x) = ax + b$ wystarczy znaleźć conajmniej dwa dowolne punkty tego wykresu.

Przykład 1.3. Niech dana będzie funkcji liniowa $f(x) = 2x-3$. Narysujemy teraz jej wykres. Wybierzmy dwa punkty należące do wykresu. Dla $x = 0$, mamy $f(0) = -3$, stąd pierwszym punktem jest $(0, -3)$, natomiast dla $x = 1$, otrzymujemy $f(1) = -1$, czyli drugim punktem będzie $(1, -1)$. Oba punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i prowadzimy prostą która przez te punkty przechodzi. W ten sposób otrzymamy wykres funkcji liniowej $f(x) = 2x - 3$.



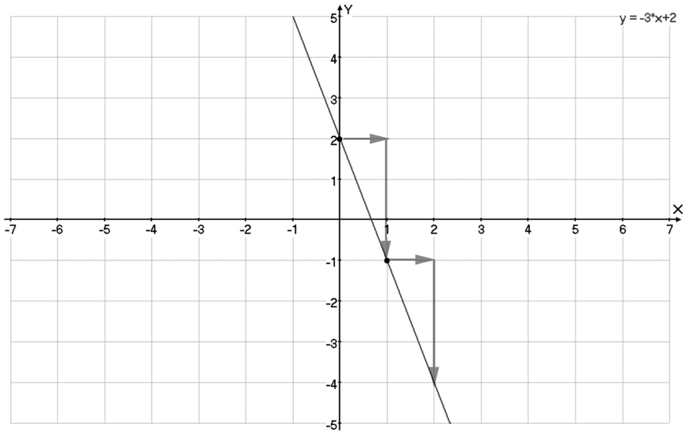
Innym sposobem rysowania wykresu zadanej funkcji liniowej jest tzw. „szybki wykres” stosowany szczególnie wtedy, gdy parametry a i b są całkowite. Wystarczy zdać sobie sprawę, że parametr b określa, w którym miejscu wykres przecina oś OY (bo $f(0) = b$), natomiast parametr a mówi nam o ile wzrasta (lub maleje) wartość funkcji, gdy argument x zwiększamy o 1.

Przykład 1.4 (szybki wykres)**.** Aby zatem narysować wykres funkcji $f(x) = 2x - 4$ zaznaczamy na osi OY punkt -4 (bo $b = -4$). Od narysowanego punktu idziemy jedną kratkę w prawo i dwie kratki do góry (bo $a = 2$) i zaznaczamy kolejny punkt. Od zaznaczonego punktu znów poruszamy się o jedną kratkę w prawo i dwie do góry i otrzymujemy kolejne punkty.



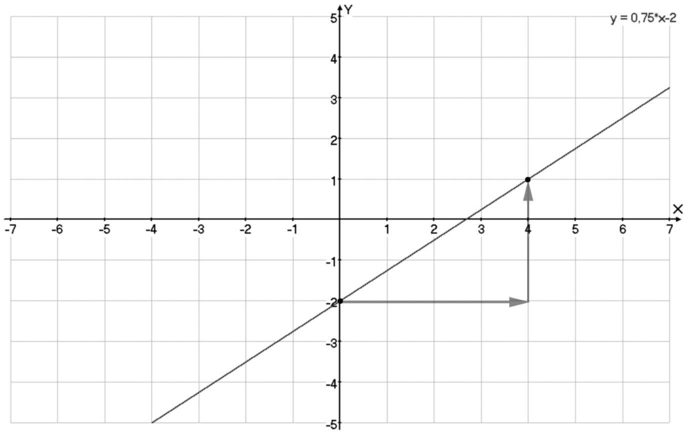
Łącząc otrzymane punkty otrzymujemy prostą która jest wykresem naszej funkcji f.

Przykład 1.5 (szybki wykres)**.** Jeśli parametr a jest ujemny, to wraz ze wzrostem argumentu x, wartość funkcji będzie malała. Zatem rysując wykres np. $f(x) = -3x + 2$ zaznaczamy na osi OY punkt 2 (bo $b = 2$) i poruszamy się o jedną kratkę w prawo i o trzy kratki w dół (bo $a = -3$) otrzymując nowy punkt. Powtarzając procedurę otrzymujemy kolejne punkty:



Uwaga 1.6. Zauważ, że używając metody szybkiego wykresu otrzymujemy dokładniejszy rysunek, gdyż dostajemy wiele punktów, co nie pozwala na „rozchwianie” się rysowanej prostej.

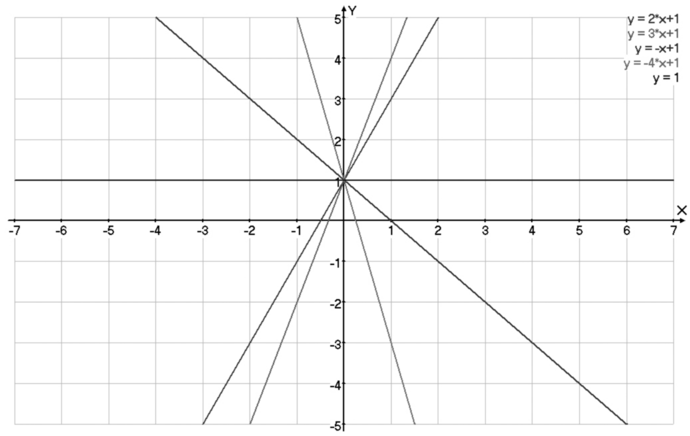
Problem 1.7. Zauważmy, że jeśli paramter a nie jest liczbą całkowitą, to szkicowanie wykresu metodą „szybkiego wykresu“ nie jest już takie proste. Na przykład jeśli $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$, to na osi OY zaznaczamy -2, a następnie powinniśmy przenieść się o jedną kratkę w prawo i $\frac{3}{4}$ kratki w górę. Jest to dość trudne do wykonania chyba, że ... zauważmy, iż otrzymamy tą samą prostą poruszając się 4 kratki w prawo i 3 kratki do góry:



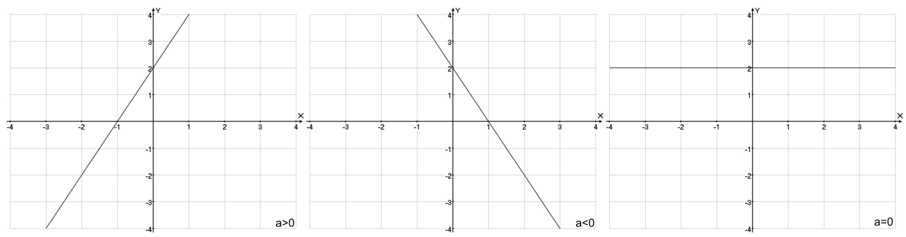
1.3 Współczynnik kierunkowy.

Definicja 1.8 (współczynnik kierunkowy)**.** Parametr a we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nosi nazwę współczynnika kierunkowego.

Po wcześniejszych rozważaniach dotyczących szkicowania wykresów funkcji liniowych nazwa ta nikogo nie dziwi. Rzeczywiście, to parametr a decyduje o tym, czy wykres opada czy wznosi się i czy jest bardziej stromy czy raczej niewiele odbiega od prostej poziomej. Jeśli w jednym układzie współrzędnych umieścimy wykresy funkcji: $f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = 3x + 1$, $f_3(x) = -x + 1$, $f_4(x) = -4x + 1$, $f_5(x) = 1$, to zobaczymy, żę choć wszystkie przechodzą przez punkt $(0, 1)$, to jednak „rozbiegają się” w różnych kierunkach.



Fakt 1.9 (monotoniczność funkcji liniowej)**.** *Każda funkcjia liniowa jest monotoniczna, a rodzaj jej monotoniczności zależy od jej współczynnika kierunkowego.*

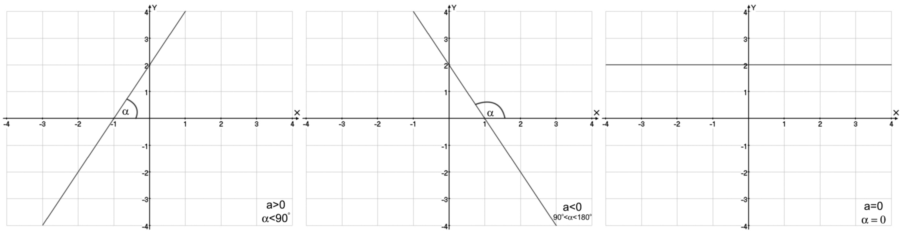


Fakt 1.10. *Jeśli współczynnik kierunkowy funkcji liniowej f jest różny od zera (tzn. $a \neq 0$) to funkcja ta jest różnowartościowa, posiada funkcję odwrotną (która jest funkcją liniową), jej zbiorem wartości jest cały zbiór liczb rzeczywistych i ma dokładnie jedno miejsce zerowe.*

Fakt 1.11. *Jeśli współczynnik kierunkowy funkcji liniowej jest równy zero, tzn. $f(x) = b$, to funkcja ta nie jest różnowartościowa, nie ma funkcji odwrotnej, jej zbiór wartości jest postaci $\{b\}$, a wykresem jest prosta pozioma (równoległa do osi OX). Jeśli więc $b \neq 0$, to funkcja nie posiada miejsc zerowych, a jeśli $b = 0$, to funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.*

Wniosek. Z podanych wyżej faktów wynika, że funkcja liniowa może mieć jedno miejsce zerowe (gdy $a \neq 0$), może nie mieć miejsca zerowego (gdy $a = 0$ oraz $b \neq 0$) lub może mieć nieskończenie wiele miejsc zerowych (gdy $a = b = 0$).

Fakt 1.12 (kąt nachylenia prostej)**.** *Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej f jest równy tangensowi kąta nachylenia wykresu tej funkcji do osi OX (dokładniej mówiąc, do prawej strony tej osi).*

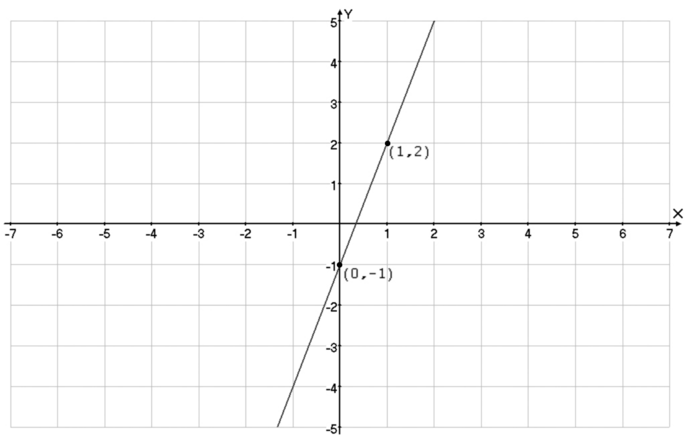


Fakt 1.13 (proste równoległe)**.** *Dwie proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.*

Fakt 1.14 (proste prostopadłe)**.** *Dwie proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 * a_2 = -1$.*

Wykresem każdej funkcji liniowej jest linia prosta. Jednak nie każda linia prosta jest wykresem funkcji liniowej. W szczególności wszystkie proste o równaniach $x = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, nie są wykresami funkcji. Każda z pozostałych prostych jest wykresem jakiejś funkcji liniowej.

Przykład 1.15. Znajdziemy teraz wzór funkcji, której wykres jest prostą przedstawioną na rysunku:



Ponieważ wykresem jest linia prosta, która nie jest pionowa, zatem szukana funkcja jest liniowa i ma postać $f(x) = ax - 1$ (skąd wiadomo, że $b = -1$?). Ponieważ wykres przechodzi przez punkt $(1, 2)$, zatem $f(1) = 2$, czyli $a-1 = 2$, co daje $a = 3$. Ostatecznie szukana postać funkcji to $f(x) = 3x-1$.

1.4 Zadania

Zadanie 1.1. Która z podanych funkcji jest funkcją liniową?

a) $f(x) = 3 - 4x$,

b) $f(x) = \frac{(x^2+1)(x-2)}{x^2+1}$,

c) $f(x) = g(\frac{1}{x})$, gdzie $g(x) = \frac{1}{x}$,

d) $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2+x-2}$.

Zadanie 1.2. Narysuj „szybki wykres" dla funkcji:

a) $f(x) = 2x - 3$,

b) $f(x) = -x + 4$,

c) $f(x) = 3x + 1$,

d) $f(x) = 4x - 3$,

e) $f(x) = -2x - 2$,

f) $(\star)$ $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$.

Zadanie 1.3. Podaj algorytm „szybkiego rysowania" wykresów funkcji postaci $f(x) = \frac{n}{k}x + b$, gdzie n, k, b są liczbami całkowitymi.

Zadanie 1.4 $(*)$**.** Dlaczego proste o równaniach $x = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ nie są wykresami funkcji?

Zadanie 1.5. Znjadź wzór funkcji odwrotnej do podanej i obie funkcje narysuj na jednym wykresie.

a) $f(x) = 3x - 1$,

b) $f(x) = -2x + 1$,

c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$,

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

Zadanie 1.6. Jeśli funkcja f jest dana wzorem funkcji liniowej, ale jej dziedziną nie jest cały zbiór liczb rzeczywistych, to co można powiedzieć o jej wykresie?

Zadanie 1.7. Narysuj wykresy funkcji:

a) $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$,

b) $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1}$,

c) $f(x) = g(\frac{1}{x})$, gdzie $g(x) = \frac{1}{x}$,

d) $f(x) = 2x + 1$, dla $x \geqslant 0$.

Zadanie 1.8. Przez które z ćwiartek układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji $f(x) = ax + 1$, gdzie $a \in \mathbb{R}$? Czy zależy to od parametru a?

Zadanie 1.9. Przez które z ćwiartek układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji $f(x) = 2x + b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$? Czy zależy to od paramteru b?

Zadanie 1.10 (∗). W zależności od paramterów a i b omów parzystość funkcji $f(x) = ax + b$.

Zadanie 1.11. Ile miejsc zerowych może mieć funkcja liniowa? Podaj przykład na każdą z możliwości.

Zadanie 1.12. Używając tablic matematycznych, kalkulatora albo komputera, podaj dokładną (lub przybliżoną) wartość kąta nachylenia podanych prostych do osi OX:

a) $f(x) = 2x + 1$,

b) $f(x) = -x + 3$,

c) $f(x) = x - 2$,

d) $f(x) = -3x - 2$,

e) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$,

f) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

Rozdział 2

Równania liniowe

2.1 Podstawowe pojęcia.

Definicja 2.1 (równanie liniowe)**.** Równaniem liniowym będziemy nazwyać równanie postaci: $ax = b$, gdzie x oznacza niewiadomą, natomiast a i b to parametry.

Rozwiązać powyższe równanie oznacza znaleźć wszystkie liczby, które podstawione w miejsce x spełniają równość. Jeśli nie zaznaczono tego inaczej, przyjmujemy, że x może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Przeanalizuj poniższe przykłady i sprawdź czy rozumiesz skąd wzięły się takie, a nie inne wyniki.

Przykład 2.2. Rozwiązaniem równania $3x = 6$ jest dokładnie jedna liczba: 2.

Przykład 2.3. Rozwiązaniem równania $2x = 0$ jest dokładnie jedna liczba: 0.

Przykład 2.4. Rozwiązaniem równania $0x = 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych (mówimy też, że pierwiastkiem tego równania jest dowolna liczba rzeczywista).

Przykład 2.5. Rozwiązaniem równania $0x = 3$ jest zbiór pusty, co oznacza, że żadna liczba rzeczywista nie jest pierwiastkiem tego równania.

2.1.1 Liczba rozwiązań równania liniowego.

Fakt 2.6. *Ogólnie, rozwiązując równanie liniowe $ax = b$ otrzymujemy:*

1. *jedno rozwiązanie postaci $x = -\frac{b}{a}$, jeśli $a \neq 0$,*

2. *nieskończenie wiele rozwiązań (czyli $x \in \mathbb{R}$), jeśli $a = 0$ i jednocześnie $b = 0$,*

3. *zbiór pusty - brak rozwiązań ($x \in \emptyset$), jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$.*

Wniosek: Równanie liniowe może mieć 0, 1 lub ∞ rozwiązań.

2.1.2 Zadania

Zadanie 2.1. Podaj liczbę pierwiastków danego równania w zależności od wartości występujących parametrów.

a) $mx - 1 = 2x$,

b) $ax^2 + 3x - 4 = 7 + a^2$,

c) $m^2x + m = x + 1$,

d) $ax + b = cx$,

e) $a^2x + 3 = 2 - (b^2 + 1)x$.

Zadanie 2.2. Rozwiąż podane równanie (uwzględniając wszystkie możliwości dla parametrów).

a) $4x + 3 = mx - m$,

b) $3x - m = mx - 3$,

c) $k^2x - 1 = x - k$,

d) $ax + 4 = 8x - b$.

2.2 Równania liniowe z założeniami.

W równaniach linowych, o których pisaliśmy dotychczas, zakładano (chociaż nie było to nigdzie wyraźnie napisane), że x może być dowolną liczbą rzeczywistą (jest to podobnie jak w przypadku funkcji - dziedzina naturalna). Może się jednak zdarzyć, że równanie będzie miało dziedzinę zadaną z góry. Poniższa definicja jest właściwie rozszerzeniem poprzedniej.

Definicja 2.7 (równanie liniowe z założeniami)**.** Równanie postacie $ax = b$ przy założeniu $x \in D$ nazywamy liniowym (z założeniami), a zbiór D nazywamy dziedziną tego równania.

Oczywiście, przy poszukiwaniu rozwiązania takiego równania, interesują nas tylko takie liczby x które spełaniają dane równanie i jednocześnie należą do zbioru D.

Przykład 2.8. Rozwiążmy równanie $3x = 5$ przy założeniu $x \in \mathbb{N}$. Oczywiście równanie takie nie ma rozwiązań, otrzymujmy zbiór pusty ($x \in \emptyset$). (dlaczego?)

Przykład 2.9. Rozważmy równanie $6x = 2$ przy założeniu $x \in (0, \infty)$. Równanie to ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{3}$.

Przykład 2.10. Równanie $0x = 0$ przy założeniu $x \in \langle 0, \infty)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, czyli ... jego rozwiązaniem jest cała dziedzina (wszystkie liczby z dziedziny spełniają to równanie), czyli: $x \in \langle 0, \infty)$.

Najprostszym sposobem rozwiązania równania liniowego $ax = b$ z założeniem $x \in D$ jest rozwiązanie „zwykłego” równania liniowego, a następnie obliczenie części wspólnej zbioru rozwiązań oraz zbioru D.

Uwaga 2.11. Jeśli w czasie pracy nad rozwiązaniem jakiegoś problemu otrzymasz równanie (niekoniecznie liniowe) ZAWSZE zastanów się, czy nie jest ono „obarczone” jakimś założeniem.

Przykład 2.12. Spróbujmy rozwiązać zadanie o następującej treści: Jeden bilet do kina kosztuje 10 zł. Za ile takich biletów zapłacisz 37 zł? Aby rozwiązać to zadanie, musimy w zasadzie rozwiązać proste równanie: $10x = 37$, ale przy założeniu $x \in \mathbb{N}$ (dlaczego?) - i oczywiście okazuje się, że rozwiązaniem jest zbiór pusty.

Przykład 2.13. Równanie postaci: $\frac{-x-3}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}$ jest oczywiście równoważne równaiu $-2x = 4$, gdzie $x \neq -2$ (dlaczego?). Jest to równanie sprzeczne (zbiorem rozwiązań jest zbiór pusty).

2.2.1 Zadania

Zadanie 2.3. Rozwiąż podane równania:

a) $(x-3)(x+4) - 2(3x-2) = (x-4)^2$, gdzie $x \in \mathbb{N}$,

b) $\frac{15}{2x+7} = \frac{6}{x+2}$,

c) $5(x-1)^2 - 2(x+3)^2 = 3(x+2)^2 - 7(6x-1)$, gdzie $x \geqslant 0$,

d) $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6(x^2 + x + 1)$, gdzie $x \neq 2$.

Zadanie 2.4. Na pewnym sprawdzianie z matematyki było do rozwiązania 10 zadań. Ustalono również następujące zasady. Za dobrze rozwiązane zadaine uczeń otrzymywał 5 punktów, natomiast za każde błędne rozwiązanie uczeń tracił 3 punkty. Ile zadań zostało rozwiązanych dobrze jeśli uczeń otrzymał:

a) 34 punkty,

b) 12 punktów,

c) 2 punkty,

d) -7 punktów?

Zadanie 2.5 ($\star$)**.** Długopis kosztuje 3 zł. Ile kosztuje ołówek, jeśli za 2 długopisy i 3 ołówki zapłacono:

a) 9 zł,

b) 7 zł,

c) 7 zł. i 50 gr?

Rozdział 3

Układy równań liniowych

Definicja 3.1. Układem dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy układ postaci:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

gdzie przynajmniej jeden z paramterów a_1 i b_1 oraz przynajmniej jeden z parametrów a_2 i b_2 jest różny od zera (to założenie jest potrzebne po to, aby każde z równań wyznaczało na płaszczyźnie pewną prostą).

Problem 3.2. Jaki zbiór punktów na płaszczyźnie określa równanie $0x+0y = c$. Czy zbiór ten zależy od wartości parametru c?

3.1 Rozwiązywanie układów równań liniowych.

Ponieważ każde z równań określa pewną prostą na płaszczyźnie zatem rozwiązaniem układu są pary (x, y) wyznaczające punkty wspólne tych prostych. Jak wiadomo dwie proste mogą mieć 0, 1 lub ∞ puntków wspólnych (czy potrafisz wykonać odpowiednie rysunki?). Z tego wynika, że rozważany układ równań może albo być sprzeczny, albo mieć dokładnie jedno rozwiązanie (mówimy wtedy że jest oznaczony) albo mieć ∞ wiele rozwiązań (mówimy wtedy, że jest nieoznaczony).

Istnieje wiele metod rozwiązywania układów równań. Jeśli układ nie zawiera parametrów, to możemy użyć:

1. metody podstawiania,
2. metody przeciwnych współczynników,
3. metody graficznej,

4. metody wyznaczników.

W układach bez parametrów, preferowane jest używanie jednej z dwóch pierwszych metod. (Przypomnij sobie na czym polegają metody 1, 2 i 3!) Jeśli natomiast układ zawiera choć jeden parametr, wydaje się, że metoda wyznaczników jest „najbezpieczniejsza” i najefektywaniejsza.

3.1.1 Metoda wyznaczników.

Metoda wyznaczników jest najbardziej uniwersalną metodą rozwiązywania układów równań liniowych. W matematyce używa się jej postaci ogólnej, zwanej metodą bądź wzorami Cramera. Metoda taka pozwala na rowiązywania, w bardzo prosty sposób, układów wielu równań z dużą liczbą niewiadomych. My w naszych rozważaniach ograniczymy się do układów dwóch równań z dwoma niewiadomymi. Poniżej zebrano podstawowe definicje i fakty, potrzebne przy korzystaniu z tej metody.

Definicja 3.3 (wyznaczniki układu równań)**.** Dla układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

wyznacznikiem głównym nazywamy liczbę W obliczoną wzorem:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Uwaga 3.4 (interpretacja geometryczna wyznacznika)**.** Wyznacznik główny informuje nas, czy proste, których równania występują w układzie równań są równoległe czy nie.

Aby zbadać ile rozwiązań ma dany układ rówńań warto posłużyć się wyznacznikiem. Poniżej zebrano kilka faktów wiążących wyznacznik, właśnie z ilością rozwiązań układu równań.

Fakt 3.5. *Jeśli wyznacznik główny układu $W = 0$, to proste wyznaczane przez ten układ są równoległe. Jeśli natomiast wyznacznik główny $W \neq 0$, to proste te nie są równoległe.*

Fakt 3.6. *Jeśli wyznacznik główy układu $W \neq 0$, to układ jest oznaczony - ma dokładnie jedno rozwiązanie. I odwrotenie, jeśli układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, to jego wyznacznik główny napewno jest różny od zera.*

Fakt 3.7. *Jeśli wyznacznik główy układ $W = 0$, to układ nie jest oznaczony - to znaczy albo okaże się być sprzeczny albo ma ∞ wiele rozwiązań.*

Uwaga 3.8. Zauważmy, że gdy $W = 0$, to dalej nie wiemy, ile rozwiązań posiada układ równań. Sposób poradzenia sobie z tą „przeszkodą” zilustruje poniższy przykład.

Przykład 3.9 (badanie ilości rozwiązań układu równań z parametrem)**.** W zależności od parametru m zbadamy ilość rozwiązań układu:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ 3x + 3my = 3 \end{cases}$$

Obliczmy wyznacznik główny tego układu.

$$W = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 3m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3.$$

Sprawdźmy kiedy $W = 0$:

$$3m^2 - 3 = 0 \qquad gdy \quad m = 1 \quad lub \quad m = -1.$$

Dla pozostałych m, zachodzi $W \neq 0$, zatem wiadomo już, że jeśli $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, to układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Pozostaje sprawdzić co się dzieje dla $m = 1$ oraz dla $m = -1$ (w obu przypadkach proste wyznaczane przez układ równań są równoległe, nie wiadomo jednak czy pokrywają się czy też nie mają punktów wspólnych).

Jeśli $m = 1$ to nasz układ przyjmuje konkretną postać:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}.$$

Wystarczy podzielić drugie równańie obustronnie przez 3 aby otrzymać:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

Bez żadnych dalszych wyliczeń łatwo możemy stwierdzić, że oba równania opisują tą samą prostą - czyli, w tym przypadku układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Jeśli natomiast $m = -1$, to układ nasz przybiera postać:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}.$$

Wystarczy teraz pierwsze z równań pomnożyć przez -1 a drugie podzielić przez 3 (dążymy do zrównania współczynnika przy x), aby otrzymać:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

Widać tutaj odrazu, że otrzymane proste są równoległe, ale napewno nie pokrywają się (są „rozsunięte"), stąd układ jest sprzeczny.

Zbierzmy więc uzyskane wyniki. Okazało się, że jeśli $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, to układ ma 1 rozwiązanie. Jeśli $m = -1$, to układ nie ma rozwiązań, jeśli natomiast $m = 1$, to układ ma ∞ wiele rozwiąząń.

Aby poradzić sobie z rozwiązaniem (a nie tylko z podaniem liczby rozwiązań) układu który posiada parametry, wprowadzimy tzw. wyznaczniki szczegółowe.

Definicja 3.10 (wyznaczniki szczegółowe układu równań)**.** Wyznacznikami szczegółowymi niewiadomych x i y nazywać będziemy odpowiednio liczby:

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$

oraz

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Fakt 3.11. *Jeśli wyznacznik główny układu $W \neq 0$, to rozwiązaniem układu jest para liczb:*

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}.$$

Co więcej można udowodnić następujące własności.

Fakt 3.12. *Jeśli $W = 0$ oraz $W_x = W_y = 0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.*

Fakt 3.13. *Jeśli $W = 0$ oraz przynajmniej jeden z wyzncznikńw szczegółowych W_x lub W_y jest różny od zera, to układ jest sprzeczny.*

3.2 Zadania

Zadanie 3.1. Używając metody podstawiania rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$

Zadanie 3.2. Używając metody przeciwnych wspólczynników rozwiąż układy równań:

1. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 3y = 8 \\ -2x + 6y = 16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$

Zadanie 3.3. Podany układ zilustruj graficznie i jeśli to możliwe podaj dokładne rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ -x + y = -2 \end{cases}$

Omów wady metody graficznej.

Zadanie 3.4. Przypuśmy, że $b_1 \neq 0$ i $b_2 \neq 0$. Wtedy każdy taki układ dwóch równań liniowych można sprowadzić do postaci:

$$\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

Posługując się interpretacją graficzną podaj jak ilość rozwiąząń zależy od liczb: $-\frac{a_1}{b_1}$, $-\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{c_1}{b_1}$, $\frac{c_2}{b_2}$.

Zadanie 3.5. W każdym z podanych niżej przypadków wylicz W i jeśli $W \neq 0$, to rozwiąż dany układ metodą wyznaczników, a jeśli $W = 0$, to przez odpowiednie pomnożenie przekształć układ do postaci, z której „widać” ilość rozwiązń:

a) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 3x + 8y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 28x + 35y + 3 = 0 \\ 12x + 15y + 25 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 5y = 25 \\ -4x - 10y = -50 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x - 3y + 1 = 0 \\ 4x - 5y + 17 = 0 \end{cases}$

Zadanie 3.6. W zależności od paramteru (parametrów) podaj liczbę rozwiązań dla:

a) $\begin{cases} x + 3my = 1 + m \\ 3mx + y = -2(m-1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} m^2x + y = 1 \\ x + y = m \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = a \\ mx + y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (a-3)x - 4y = b \\ 9x - (a+2)y = -9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$

Zadanie 3.7. W zależności od parametru m rozwiąż podany układ:

a) $\begin{cases} 3x + my = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $(\star)$ $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + my = 2m \end{cases}$

c) $(\star)$ $\begin{cases} mx + y = m \\ x + my = m^2 \end{cases}$

Zadanie 3.8. W zależności od paramteru k podaj liczbę rozwiązań układu:

$$\begin{cases} kx + y = k^2 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

i odpowiedz, dla jakich wartości parametru k układ:

1. jest niesprzeczny,
2. ma co najmniej jedno rozwiązanie,
3. jest nieoznaczony,
4. ma co najwyżej jedno rozwiązanie,
5. ma conajmniej dwa rozwiązania,
6. ma dokładnie siedem rozwiązań,
7. ($\star$) ma rozwiązanie będące parą liczb przeciwnych.

Rozdział 4

Funkcja kwadratowa

4.1 Podstawowe definicje.

Definicja 4.1 (funkcja kwadratowa)**.** Funkcją kwadratową nazywamy dowolną funkcję postaci: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, natomiast b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Uwaga 4.2. Jeśli w zadaniu pojawi się funkcja, którą „wygląda" jak funkcja kwadratowa, ale współczynnik przy x^2 zawiera parametr (np. $f(x) = (m + 1)x^2 + mx - 3$) to najczęściej musimy rozpatrzeć osobno dwa przypadki: funkcji kwadratowej (gdy $m \neq -1$) oraz funkcji liniowej (gdy $m = -1$).

Wykres funkcji kwadratowej. Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. „Składa" się ona z wierzchołka i dwóch ramion, które albo są skierowane do góry (gdy $a > 0$) albo na dół ($a < 0$). Współrzędne wierzchołka obliczamy ze wzorów: $W = (p, q)$, gdzie $p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$ ($\Delta = b^2 - 4ac$). Symbol Δ zwany **wyróżnikiem** rozpatrywanego trójmianu kwadratowego informuje nas o ilości miejsc zerowych:

- jeśli $\Delta > 0$, to funkcja posiada dwa miejsca zerowe,
- jeśli $\Delta = 0$, to funkcja posiada jedno miejsce zerowe,
- jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie posiada miejsce zerowych.

Fakt 4.3. *Jeśli $a \neq 0$ i $\Delta \geqslant 0$, to miejsca zerowe dane są wzorami: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. (Jeśli $\Delta = 0$, to oba wzory dają tą samą liczbę oznaczaną przez x_0.)*

Uwaga 4.4. Parametr c oznacza miejsce przecięcia wykresu x osią OY (ponieważ oczywiście $f(0) = a * 0 + b * 0 + c = c$).

4.2 Rysowanie wykresu funkcjia kwadratowej.

Jeśli chcemy narysować wykres funkcji kwadratowej, to:

1. wyliczamy wierzchołek $W(p, q)$ i zaznaczamy go na wykresie,
2. zaznaczamy punkt $(0, c)$ - miejsce przecięcia z osią OY,
3. korzystając z faktu, że parabola ma oś symetrii (jest to prosta o równaniu $x = p$) i zaznaczamy punkt symetryczny do $(0, c)$ który ma współrzędne $(2p, c)$,
4. jeśli istnieją miejsca zerowa i są łatwe do obliczenia, zaznczamy je na osi OX,
5. przez otrzymane punkty prowadzimy krzywą o kształcie możliwie najbardziej zbliżonym do paraboli (pamiętając o symetryczności, o niezłamywaniu ramion i o gładkim wierzchołku).

Uwaga 4.5. Może się zdarzyć, że z kroków $1 - 4$ dostajemy zaledwie jeden punkt (np. dla funkcji $f(x) = x^2 + 4$). Wtedy należy wyliczyć wartość np. dla $x = 1$ (wybieramy takie parametry x dla których obliczenia są możliwie najprostsze) i otrzymany punkt, wraz z punktem do niego symetrycznym, zazanczamy na rysunku.

Należy pamiętać, że w zasadzie, mamy 6 „różnych” parabol (co możesz powiedzieć o wielkościach Δ oraz a dla każdego z przypadków?):

tu będzie rysunek (przypadki ze względu na znak a oraz Δ)

Dlatego po przeczytaniu dowolnego zadania z funkcją kwadratową, należy zastanowić się, które z tych sześciu parabol spełniają założenia tego zadania, a następnie opisać je w terminach Δ oraz a.

4.3 Wzory Viete'a.

Poznamy dwa wzory które ułatwiają bardzo wiele obliczeń. Zapamiętanie ich i częste stosowanie, pozwala rozwiązać wiele zadań, które bez tych wzorów mogłby być dość skomplikowane.

Fakt 4.6 (wzory Viete'a)**.** *Jeśli $a \neq 0$ i $\Delta \geqslant 0$, to:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Uwaga 4.7. Wzory Viete'a pozwalają powiedzieć coś o x_1 i x_2 bez potrzeby wyliczania tych liczb.

Przykład 4.8 (zastosowanie wzorów Viete'a)**.** Niech $f(x) = x^2 - 8x + 6$. Wyróżnik tego trójmianu Δ wynosi 40, co oznacza, że funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2. Łato zauważyć, że oba miejsca zerowe będą liczbami nie wymiernymi. Jednak wiele rzeczy o tych pierwiastkach można powiedzieć, nie znając ich dokładnej wartości. Zapiszmy wzory Viete'a dla tej funkcji:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 x_2 = 6 \end{cases}$$

Odrazu widać stąd, że obie liczby x_1 i x_2 są dodatnie (dlaczego?). Bez wyliczania wartości tych pierwiastków można również powiedzieć (policzyć), że:

a) suma kwadratów x_1 i x_2 wynosi: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8^2 - 2 * 6 = 64 - 12 = 52$,

b) suma odwrotności x_1 i x_2 wynosi: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$,

c) odległość x_1 i x_2 wynosi: $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{8^2 - 4 * 6} = \sqrt{40}$,

oraz każde inne wyrażenie symetryczne ze względu na x_1 i x_2.

4.4 Funkcja kwadratowa w różnej postaci.

Istnieje wiele postaci zapisu wzoru funkcji kwadratowej. Poniżej zebrano kilka najczęściej używanych form, wraz z podanymi zaletami każdego ze sposobów.

1. Postać ogólna: $f(x) = ax^2 + bx + c$ - „widać" punkt przecięcia z osią OY, łatwo otrzymać wzory Viete'a.

2. Postać kanoniczna: $f(x) = a(x-p)^2 + q$ - „widać” wierzchołek oraz liczbę miejsc zerowych.

3. Postać iloczynowa: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (istnieje tylko wtedy, gdy $\Delta \geqslant 0$, co więcej gdy $\Delta = 0$ skraca się do zapisu $f(x) = a(x-x_0)^2$) - „widać” miejsca zerowe.

Warto znać podane wyżej zapisy, tak aby można było w odpowiednich zadania odrazu zastosować odpowiedni zapis i odczytać możliwie jak najwięcej informacji bez wykonywania dodatkowych obliczeń.

4.5 Własności funkcji kwadratowej.

Poniżej zebrano podstawowe własności funkcji kwadratowej.

1. **Zbiór wartości funkcji kwadratowej.** Jeśli $a > 0$, to zbiorem wartości jest przedział $\langle q, \infty)$, jeśli natomiast $a < 0$, to zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, q\rangle$. Czy wiesz dlaczego?

2. **Monotoniczność.** Żadna funkcja kwadratowa nie jest monotoniczna, a jedynie przedziałami monotoniczna. Jeśli $a > 0$, to funkcja maleje w przedziale $(-\infty, p)$ a rośnie w przedziale (p, ∞). Natomiast, jeśli $a < 0$, to funkcja rośnie w przedziale $(-\infty, p)$ natomiast rośnie w przedziale (p, ∞).

3. **Różnowartościowość.** Żadna funkcja kwadratowa **nie** jest różnowartościowa, a co za tym idzie nie posiada funkcji odwrotnej.

4.6 Funkcja kwadratowa określona na przedziale domkniętym.

Bardzo często rozwiązanie problemu sprowadza się do rozważenia funkcji: $f(x) = ax^2+bx+c$ przy założeniu, że $x \in \langle r_1, r_2\rangle$, gdzie r_1 oraz r_2 to dowolne liczby rzeczywiste takie, że $r_1 < r_2$. Co prawda funkcja ta jest dana wzorem funkcji kwadratowej, ale jej dziedziną nie jest cały zbiór liczb rzeczywistych a jedynie przedział $\langle r_1, r_2\rangle$. Mówimy, że obcinamy funkcję kwadratową do przedziału $\langle r_1, r_2\rangle$. Wykresem tej funkcji nie jest cała parabola, a jedynie jej fragment zawarty między prostymi $x = r_1$ oraz $x = r_2$ (łączeni z punktami końcowymi).

Problem 4.9. Rozważ funkcję $f(x) = x^2$ obciętą do różnych przedziałów, np: $x \in \langle -1, 2\rangle$, $x \in \langle 1, 2\rangle$, $x \in \langle 0, 3\rangle$, $x \in \langle -2, -1\rangle$. Spróbuj omówić „typy" otrzymanych wykresów. Zauważmy, że otrzymane funkcje mogą mieć różne własności - inne niż funkcja przed obcięciem. W pewnych sytuacjach możemy otrzymać funkcję monotoniczną, różnowartościową, ze zmniejszoną liczbą miejsc zerowych itd. Najważniejszą nową własnością jest fakt, że każda taka funkcja posiada wartość najmniejszą oraz wartość najmniejszą (mówimy, że funkcja osiąga swoje kresy).

Przykład 4.10 (wartość największa i najmniejsza)**.** Rozważmy poniższe funkcje. Wszystkie dane będą jednym wzorem $f(x) = x^2 - 4$.

1. Niech w tym przypadku, dziedziną funkcji będzie cały zbiór liczb rzeczywistych. Wtedy, nasza funkcja posiada wartość najmniejszą, która wynosi -4 i jest osiągana dla $x = 0$, ale nie posiada wartości największej.

2. Obetnijmy dziedzinę do przedziału $x \in \langle -1, 1\rangle$. Otrzymujemy nową (inną!) funkcję. Podobnie jak poprzednio posiada ona wartość największą -4 którą osiąga dla $x = 0$. W odróżnieniu jednak od poprzedniej, ta funkcja posiada również wartość największą -3, którą osiąga w dwóch miejsach, dla $x = \pm 1$.

3. Niech teraz, dziedziną naszej nowej funkcji będzie inny przedział - $x \in \langle 1, 2\rangle$. Taka funkcja posiada wartość najmniejszą, która wynosi -3 i jest osiągana dla $x = 1$ oraz wartość największą, która wynosi 0 i jest osiągana dla $x = 2$.

Aby lepiej zrozumieć powyższy przykład, wykonaj odpowiednie rysunki.

4.7 Zadania

Zadanie 4.1. Dla podanych funkcji znajdź postać ogólną, kanoniczną, iloczynową, wierzchołek paraboli i miejsca zerowe:

a) $f(x) = 2x^2 + 6x + 8$,

b) $f(x) = 2(x - 3)^2$,

c) $f(x) = (x + 3)^2 - 6$,

d) $f(x) = 2x^2 + 6x$.

Zadanie 4.2. Naszkicuj wykresy funkcji z zadania 1, podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości.

Zadanie 4.3. Wyznacz wartości współczynników b i c funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ tak, aby:

a) do wykresu tej funkcji należały punkty $(1, 1)$ oraz $(0, -5)$,

b) do wykresu tej funkcji należały punkty $(3, 9)$ oraz $(-1, -9)$,

c) funkcja ta miała dwa miejsca zerowe 2 i -3,

d) funkcja ta miała dokładnie jedno miejsce zerowe 3,

e) funkcja ta osiągnęła minimum równe 5 dla $x = -2$,

f) jej wykres przecinał oś OY w punkcie $(0, 3)$ i był styczny do osi OX.

Rozwiązania zobrazuj na odpowiednim rysunku.

Zadanie 4.4. Dla jakich wartości parametru m podana funkcja posiada dokładnie jedno miejsce zerowe:

a) $f(x) = mx^2 + 3x + 4$,

b) $f(x) = x^2 - mx + 2$,

c) $f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3m$.

Zadanie 4.5. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale:

a) $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$, $x \in \langle 0, 2\rangle$,

b) $f(x) = x^2 + 4x - 2$, $x \in \langle -1, 2\rangle$,

c) $f(x) = x - x^2$. $x \in \langle 0, 2\rangle$.

Zadanie 4.6. Wyróżniki podanych trójmianów są dodatnie (sprawdź to!). Oblicz sumę i iloczyn miejsc zerowych każdego z trójmianów (bez wyliczania wartości tych miejsc zerowych):

a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$,

b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$,

c) $f(x) = -3x^2 + 5x + 2$,

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$.

Jakiego znaku są miejsca zerowe każdego z tych trójmianów?

Zadanie 4.7. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 + (m - 1)x + 3$:

a) przyjmuje tylko wartości dodatnie,

b) przyjmuje tylko wartości ujemne,

c) jest funkcją parzystą.

Zadanie 4.8. Poniższe wyrażenia przedstaw za pomocą $x_1 + x_2$ oraz x_1x_2:

a) $x_1^3 + x_2^3$,

b) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$,

Rozdział 5

Równania i nierówności kwadratowe

5.1 Równanie kwadratowe.

Definicja 5.1 (równanie kwadratowe)**.** Równaniem kwadratowym nazywamy równanie postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{gdzie } a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}.$$

Przykład 5.2. Rozważmy równanie: $(m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ ($m \in \mathbb{R}$ jest parametrem). W zależności od wartości parametru, zachodzi jeden z przypadków:

- jest to równanie liniowe dla $m = 1$,
- jest to równanie kwadratowe dla $m \neq 1$.

5.1.1 Liczba rozwiązań równania kwadratowego.

Fakt 5.3 (liczba rozwiązań równania kwadratowego)**.** *Jeśli* $\Delta > 0$*, to równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania:* $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *lub* $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$*. Jeśli* $\Delta = 0$*, to równanie kwadratowe ma jedno rozwiązanie,* $x = \frac{-b}{2a}$*. Jeśli* $\Delta < 0$*, to równanie kwadratowe nie ma rozwiązań - jest sprzeczne.*

Przykład 5.4. Zastanówmy się ile rozwiązań, w zależności od parametru m, ma równanie $mx^2 + 4x - 1 = 0$. Zauważmy, że jeśli $m = 0$, to powyższe równanie, nie jest równaniem kwadratowym i redukuje się do równania postaci: $4x - 1 = 0$, które jako równanie liniowe, oczywiście ma jedno rozwiązanie ($x = \frac{1}{4}$). Jeśli natomiast $m \neq 0$, to mamy doczynienia z równaniem kwadratowym. Możemy wobec tego policzyć deltę: $\Delta = 16 + 4m$ (należy pamiętać, że obliczona Δ istnieje tylko w przypadku gdy $m \neq 0$). Łatow zatem policzyć, że jeśli $m > -4$ (przy założeniu $m \neq 0$!) to $\Delta > 0$, czyli równanie ma wówczas dwa różne pierwiastki. Jeśli $m = -4$, tp $\Delta = 0$, co daje równanie tylko z jednym pierwiastkiem. Jeśli natomiast $m < -4$, to $\Delta < 0$, wobec czego równanie jest sprzeczne. Zbierzmy uzyskane wyniki:

- Jeśli $m \in (-4, 0) \cup (0, \infty)$, to równanie ma 2 rozwiązania.
- Jeśli $m = -4 \vee m = 0$, to równanie ma 1 rozwiązanie.
- Jeśli $m \in (-\infty, -4)$, to równanie nie ma rozwiązań.

5.2 Nierówność kwadratowa.

Definicja 5.5. Nierównością kwadratową nazywać będziemy nierówności postaci: $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \neq 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$. gdzie $a \neq 0$, oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5.2.1 Graficzne przedstawienie nierówności kwadratowej.

Przy rozwiązywaniu nierówności kwadratowych, często najwygodniejszym sposobem jest skorzystanie z metody graficznej, która daje szybki i dokładny wynik. Aby rozwiązać nierówność kwadratową, postępujemy w następujący sposób. Szkicujemy przybliżony wykres funkcji kwadratowej danej wzorem z nierówności, przy czym najbardziej interesują nas w nim miejsca zerowe funkcji (nie musimy wyliczać współrzędnych wierzchołka, miejsca przecięcia z osią OY itd. - najczęściej w ogóle nie rysujemy osi OY!). Następnie patrzymy dla jakich wartości x naszkicowany wykres jest "nad" osią OX, a dla jakich "pod" osią OX. Odpowiednio dla danej nierówności, wybieramy przedział który jest rozwiązaniem nierówności. Powyższe rozumowanie pokażemy na kilku przykładach.

Przykład 5.6. Rozwiążemy nierówność $x^2 - 6x + 8 > 0$. Wykresem funkcji danej wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 8$ jest parabola o ramionach skierowanych w górę, posiądająca dwa miejsca zerowe $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 4$. Stąd otrzymujemy szybko odpowiedź: $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$. (Narysuj samodzielnie odpowiedni rysunek i sprawdź czy rozumiesz, skąd wzięła się odpowiedź!)

Przykład 5.7. Pokażemy teraz, dla jakich wartości parametru m, rozwiązaniem nierówności: $2x^2+4x+m \geqslant 0$, jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Wykresem lewej strony nierówności jest parabola o ramionach skierowanych w górę (dlaczego?). Aby każda liczba rzeczywista spełniała tą nierówność, parabola ta powinna "nie schodzić" poniżej osi OX, tzn. w całości musi znajdować się nad osią OX lub ewentualnie może się z nią stykać. Stąd dostajemy warunek $\Delta \leqslant 0$ (dlaczego?). Ponieważ $\Delta = 16 - 8m$, zatem $m \geqslant 2$. Zatem rozwiązaniem naszej nierówności $2x^2 + 4x + m \geqslant 0$ będzie cały zbiór liczb rzeczywistych, wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \langle 2, \infty)$. (Narysuj odpowiedni rysunek i zastanów się, czy rozumiesz jak otrzymaliśmy taką odpowiedź!)

Przykład 5.8. Rozważmy nierówność $(5-k)x^2 - 2(1-k)x + 2(1-k) < 0$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ jest parametrem. Zastanówmy się dla jakich wartości tego parametru, rozwiązaniem nierówności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Pierwsze spostrzeżenie jest takie, że jedynie dla $k \neq 5$, dana nierówność jest rzeczywiście nierównością kwadratową. Dla $k = 5$ nierówność sporwadza się do nierówności liniowej $8x - 8 < 0$, której rozwiązaniem nie jest cały zbiór liczb rzeczywistych, tylko przedział $x \in (-\infty, 1)$. Stąd napewno $k = 5$ nie jest szukanym k. W dalszych rozważaniach zakładamy więc, że $k \neq 5$.

Skoro $k \neq 5$, to rozważana nierówność jest nierównością kwadratową i wykresem jej lewej strony jest parabola. Rozwiązaniem będzie cały zbiór liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy cała parabola będzie leżeć pod osią OX, czyli $a < 0$ (ramiona muszą być skierowane w dół) oraz $\Delta < 0$ (nie może być miejsc zerowych). Otrzymujemy zatem następujące warunki:

$$\begin{cases} k \neq 5 \\ a = 5 - k < 0 \\ \Delta = 4(1-k)^2 - 8(5-k)(1-k) < 0 \end{cases}$$

Drugi warunek daje $k > 5$, a trzeci: $k \in (-\infty, 1) \cup (9, \infty)$. Częścią wspólną wszystkich warunków jest szukana odpowiedź, czyli: $k \in (9, \infty)$.

5.3 Zadania

Zadanie 5.1. Rozwiąż równanie:

a) $(3x-8)^2 - (4x-6)^2 + (5x-2)(5x+2) = 96$,

b) $(2x-7)^2 + (3x-5)^2 + (4x-9)(4x+9) = 2(64-29x)$.

Zadanie 5.2. Zbadaj liczbę pierwistków równania $x^2 - 6x + 5 = m$ w zależności od paramteru m. Zadanie rozwiąż na dwa sposoby: analitycznie oraz graficznie. Który ze sposobów jest efektywniejszy?

Zadanie 5.3. W zależności od paramteru m podaj liczbę pierwiastków równania:

a) $x^2 - m^2 = 2mx + 1$,

b) $mx^2 + mx + m = 0$,

c) $(m-5)x^2 + (5-m)x - 3m = 0$.

Zadanie 5.4. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m-1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ ma 2 różne, ujemne pierwiastki rzeczywiste?

Zadanie 5.5. Rozwiąż nierówności:

a) $x^2 - 8x + 12 < 0$,

b) $x^2 < -4(x+1)$,

c) $2x(x-10) \geqslant 4(x-8)$,

d) $x(x+19) \leqslant 3(18+5x)$.

Zadanie 5.6. Dla jakich wartości paramteru m zbiorem rozwiązań nierówności jest cały zbiór $\mathbb{R}$?

a) $x^2 - mx + m + 3 > 0$,

b) $(m^2 + 5m - 6)x^2 - 2(m-1)x + 3 \geqslant 0$,

c) $-x^2 + 4mx + 13 > 0$.

Zadanie 5.7. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dokładnie jeden pierwiastek. Znajdź ten pierwiastek.

a) $mx^2 + 2(m-1)x + m - 3 = 0$,

b) $x^2 + mx + m + 3 = 0$,

c) $(m+1)x^2 - 2x + m - 1 = 0$.

5.4 Przykłady typowych zastosowań funkcji kwadratowej w zadaniach.

W tym podrozdziale zebrano kilka przykładów zadań, w których pojawia się funkcja, równanie bądź nierówność kwadratowa. Przeanalizuj poniższe przykłady i upewnij się, czy wszystko jest zrozumiałe.

Przykład 5.9. Zadanie: Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $(m+1)x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku.

Rozwiązanie: Jeśli $m = -1$, to równanie redukuje się do: $4x+1 = 0$ i nie spełnia warunków zadania (to równanie liniowe nie może mieć dwóch różnych pierwiastków tego samego znaku). Jeśli natomiast $m \neq -1$, to równanie jest kwadratowe. Wtedy ilość pierwiastków zależy od Δ, a znak pierwiastków ustalamy ze wzorów Viete'a. Otrzymujemy następujące warunki:

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Drugi warunek daje nam sumę przedziałów: $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$. Z trzeciego warunku mamy: $m \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, \infty)$. Odpowiedzią będzie część wspólna otrzymanych wyników.

Odpowiedź: Równanie ma dwa pierwiastki tego samego znaku, gdy $m \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, -\frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$.

Przykład 5.10. Zadanie: Wyznacz wartości parametru m, dla których wartość bezwzględna różnicy pierwiastków równania: $x^2+mx+12 = 0$ jest równa 1.

Rozwiązanie: Jest to równanie kwadratowe, więc aby móc mówić o różnicy pierwiastków, musimy mieć pewność że istnieją dwa różne pierwiastki. Mamy więc:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ |x_1 - x_2| = 1 \end{cases}$$

Z pierwszego warunku mamy:

$$\Delta = m^2 - 48$$

$$m^2 - 48 > 0$$

$$m \in (-\infty, -4\sqrt{3}) \cup (4\sqrt{3}, \infty)$$

Drugi warunek przekształcamy tak aby można było skorzystać ze wzorów Viete'a. Warunek $|x_1 - x_2| = 1$ jest spełniony, wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_1 - x_2)^2 = 1$ (czy wiesz dlaczego?). Przekształcimy wyrażenie $(x_1 - x_2)^2$:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{\Delta}{a^2}$$

A stąd mamy, że:

$$\frac{m^2 - 48}{1} = 1$$
$$m^2 = 49$$
$$m = 7 \vee m = -7$$

Odpowiedzią jest część wspólna wyników z oby warunków. W tym przypadku tą część wspólną stanowi dokładnie to co wyszło z warunku drugiego.

Odpowiedź: Zadanie jest spełnione dla $m \in \{-7, 7\}$.

Przykład 5.11. Zadanie: Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $(m+1)x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku.

Rozwiązanie: Jeśli $m = -1$, to równanie redukuje się do: $4x+1 = 0$ i nie spełnia warunków zadania (to równanie liniowe nie może mieć dwóch różnych pierwiastków tego samego znaku). Jeśli natomiast $m \neq -1$, to równanie jest kwadratowe. Wtedy ilość pierwiastków zależy od Δ, a znak pierwiastków ustalamy ze wzorów Viete'a. Otrzymujemy następujące warunki:

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Drugi warunek daje nam sumę przedziałów: $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$. Z trzeciego warunku mamy: $m \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, \infty)$. Odpowiedzią będzie część wspólna otrzymanych wyników.

Odpowiedź: Równanie ma dwa pierwiastki tego samego znaku, gdy $m \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, -\frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$.

Przykład 5.12. Zadanie: Wyznacz wartości parametru m, dla których liczba 5 leży pomiędzy pierwiastkami równania: $x^2 + 4mx + 3m^2 = 0$.

Rozwiązanie: Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + 4mx + 3m^2$ jest parabola o ramionach skierowanych w górę. Jeśli $\Delta > 0$, to ma ona dwa miejsca zerowe. Co więcej 5 leży pomiędzy tymi pierwiastkami, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(5) < 0$ (czy wiesz dlaczego? - sporządź szkic wykresu funkcji i spróbuj to wyjaśnić!). Zatem:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 25 + 20m + 3m^2 \end{cases}$$

Obliczenia przeprowadzamy podobnie do poprzednich przykładów. (Ze względu na to podobieństwo pomijamy je tutaj - doprowadź obliczenia do końca i sprawdź odpowiedź!)

Odpowiedź: Zadanie jest spełnione dla $m \in (-5, -\frac{5}{3})$.

Przykład 5.13. Zadanie: Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie: $x^2 + 4mx + 3m^2 = 0$ ma dwa pierwiastki, które są sinusem i cosinusem tego samego kąta ostrego.

Rozwiązanie: Oczywiście muszą istnieć dwa różne pierwiastki, czyli $\Delta > 0$. Aby były one sinusem i cosinusem tego samego kąta, musi zachodzić równość $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (czy wiesz dlaczego musi zajść ten warunek? przypomnij sobie „słynną" jedynkę trygonometryczną!). Chcemy również, aby kąt był ostry - czyli $x_1, x_2 > 0$ (dla kątów ostry zarówno sinus jak i cosinus, przyjmują wartości nieujemne). Mamy zatem warunki:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 > 0 \land x_2 > 0 \end{cases}$$

Dwa ostatnie warunki sprowadzamy do wzorów Viete'a:

$$x_1^2 + x_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = 1$$

$$x_1 > 0 \land x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Pozostaje tylko dokończyć obliczenia, które są bardzo podobne do tych, które wykonywaliśmy w poprzednich przykładach.

Odpowiedź: Zadanie jest spełnione dla $m = \sqrt{15}$.

Przykład 5.14. Zadanie: Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ przyporządkowuje każdej liczbie $m \in \mathbb{R}$ liczbę rozwiązań równania $mx^2 + mx + 2 = 0$. Naszkicuj wykres funkcji f.

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla $m = 0$ równanie to nie jest kwadratowe i upraszcza się do: $2 = 0$. Takie równanie jest oczywiście sprzeczne. Wniosek: dla $m = 0$ mamy zero rozwiązań (czyli $f(0) = 0$).

Jeśli $m \neq 0$, to rozpatrywane równanie jest kwadratowe i liczba rozwiązań zależy od Δ: $\Delta = m^2 - 8m$.

Jeśli więc $m^2 - 8m > 0$ (i $m \neq 0$) to mamy 2 rozwiązania. Tak dzieje się dla $m \in (-\infty, 0) \cup (8, \infty)$. Dla $m = 8$ mamy 1 rozwiązanie. Dla $m \in (0, 8)$ równanie nie ma rozwiązań.

Zatem możemy już podać wzór na funkcję f:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in \langle 0, 8) \\ 1 & \text{dla } m = 8 \\ 2 & \text{dla } m \in (-\infty, 0) \cup (8, \infty) \end{cases}$$

Teraz wystarczy tylko narysować wykres funkcji f korzystając z podanego wyżej wzoru. Dokończenie tego zadania pozostawiamy jako ćwiczenie czytelnikowi.

Przykład 5.15. Zadanie: Dla jakich wartości parametru m, suma kwadratów rozwiązań równania równania: $x^2 - mx + m - 1 = 0$ jest najmniejsza?

Rozwiązanie: Sprawdźmy najpierw kiedy w ogóle istnieją dwa pierwiastki, czyli kiedy $\Delta > 0$.

$$\Delta = m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$$

Zatem dwa (różne) pierwiastki istnieją gdy $m \neq 2$.

Suma kwadratów pierwiatsków saje się zapisać wzorami Viete'a, jako:

$$x_1^2 + x_1^2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}.$$

Stąd:

$$x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2(m-1) = m^2 - 2m + 2.$$

Rozważmy zatem funkcję $f(m) = m^2 - 2m + 2$, gdzie $m \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$. Wykresem tej funkcji jest parabola z wymazanym punktem nad $m = 2$ (nie jest to na szczęście wierzchołek tej paraboli). Po naszkicowaniu tej paraboli, łatwo przekonać się, że najmniejszą wartość, funkcja f osiąga dla $m = 1$.

Odpowiedź: Dla $m = 1$ suma kwadratów pierwiastków danego równania jest najmniejsza. (Czy rozumiesz skąd wzięła się ta odpowiedź?)

5.4.1 Zadania dodatkowe

Po przeanalizowaniu powyższych przykładów, samodzielne rozwiązanie kilku podobnych zadań nie powinno spawić Ci problemu.

Zadanie 5.8. Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $(m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2 = 0$ ma dwa pierwiastki o różnych znakach.

Zadanie 5.9. Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie: $x^2 - 2x + 1 = 2xm + m^2$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie.

Zadanie 5.10. Wyznacz wartości parametru m, dla których iloczyn pierwiastków równania: $(m-3)x^2 - (m+2)x + 1 = 0$ jest większy od 2.

Zadanie 5.11. Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie: $x^2 + (6-m)x + 2(6-m) = 0$, ma dwa rozwiązania, takie, że suma ich kwadratów jest najmniejsza.

Zadanie 5.12. Wyznacz wartości parametru m, dla których pierwiastki równania: $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ należą do przedziału $(-2, 4)$.

Zadanie 5.13. Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie: $3x^2 + mx + \frac{3}{2} = 0$ ma dwa rozwiązania, które są sinusem i cosinusem tego samego kąta.

Zadanie 5.14. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie $m \in \mathbb{R}$ liczbę rozwiązań równania:

a) $x^2 + mx + m = 0$,

b) $(m+2)x^2 + 6mx + 4m - 1 = 0$.

Naszkicuj wykres funkcji f.

Rozdział 6

Wartość bezwzględna

Zbiór liczb rzeczywistych (który oznaczamy przez $\mathbb{R}$) można przedstawić graficznie jako zbiór punktów na osi liczbowej (tzn. na prostej „wyposażonej” w zwrot, punkt oznaczony jako zero i jednostkę). Każdej liczbie rzeczywistej x odpowiada na takiej osi dokładnie jeden punkt.

Definicja 6.1 (wartość bezwzględna)**.** Wartością bezwzględną liczby x nazywamy odległość punktu odpowiadającego tej liczbie na osi liczbowej, od punktu zero i oznaczamy przez $|x|$.

Przykład 6.2. Jeśli zaznaczymy na osi liczbowej liczbę 4, to łatwo zauważymy, że jej odległość od zera wynosi 4, stąd $|4| = 4$.

Przykład 6.3. Jeśli zaznaczymy na osi liczbowej liczbę -3, to widzimy, że jej odległość od punktu zero wynosi 3, stąd $|-3| = 3$.

Przykład 6.4. Podobnie możemy pokazać, że na przykład: $|5| = 5$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$, $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $|\frac{-3}{4}| = \frac{3}{4}$ itd.

Widzimy więc, że obliczenie wartości bezwzględnej z liczby rzeczywistej jest bardzo proste. Możemy przedstawić to w formie przepisu:

- jeśli liczba x jest dodatnia lub jeśli jest zerem, to $|x| = x$,
- w przeciwnym wypadku (jeśli liczba x jest ujemna), tp $|x| = -x$.

W ten sposób otrzymaliśmy wzór, który często podaje się wręcz jako definicję wartości bezwzględnej:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

6.1 Własności wartości bezwzględnej.

Poniższy fakt zbiera podstawowe własności wartości bezwzględnej.

Fakt 6.5. *Dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ mamy:*

1. $|-x| = |x|$,
2. $|x| \geqslant 0$,
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, *przy założeniu* $y \neq 0$,
5. $|x - y| = |y - x|$.

Uwaga 6.6. Zauważmy, że dla sumy i różnicy na ogół nie są spełnione własności podobne do tych z punktu 3 i 4 powyższego faktu. Na przykład:

$$|(-3) + 4| \neq |-3| + |4|,$$

$$|5 - 10| \neq |5| - |10|.$$

6.2 Równania z wartością bezwzględną.

Definicja 6.7 (równanie podstawowe z wartością bezwzględną)**.** Równaniem podstawowym z wartością bezwzględną będziemy nazywać równanie postaci:

$$|\text{coś}| = a,$$

gdzie a jest konkretną (ustaloną) liczbą rzeczywistą.

Przykład 6.8. Równania o których mówi definicja wyglądają na przykład tak: $|x| = 2$, $|3x - 4| = 8$, $|x^2 - 4x + 1| = 2$, $|3x - x^2| = 0$, $|4x + 1| = -3$ itp.

Prezentowane tu równania, w których występuje wartość bezwzględna, są bardzo proste. Z tego względu nazywamy je podstawowymi. W toku późniejszych rozważań zajmiejmy się również przypadkami bardziej skomplikowanymi, gdzie na przykład niewiadoma będzie zarówno wewnątrz wartości bezwzględnej jak i poza nią, lub takie gdzie będzie więcej niewiadomych.

Poniższy fakt umożliwia rozwiązywanie równań podstawowych z wartością bezwzględną.

Fakt 6.9. *W zależości od wartości parametru a zachodzi jeden z przypadków.*

1. *Jeśli $a < 0$, to równanie $|coś| = a$ nie ma rozwiązania.*

2. *Jeśli $a = 0$, to równanie $|coś| = a$ jest tożsame równaniu: $coś = a$.*

3. *Jeśli $a > 0$, to równanie $|coś| = a$ jest równoważne warunkom: $coś = a \vee coś = -a$.*

Korzystając z powyższego faktu, rozwiążemy podane w poprzednim przykładzie równania podstawowe. Sprawdź czy rozumiesz skąd wzięły się podane niżej wyniki.

Przykład 6.10. Równanie $|x| = 2$ ma dwa rozwiązania: $x = 2 \vee x = -2$.

Przykład 6.11. Roziązenie równanie $|3x - 4| = 8$, sprowadza się do rozwiązania dwóch równań liniowych: $3x - 4 = 8$ oraz $3x - 4 = -8$. Daje to nam odpowiedź: $x = 4 \vee x = -\frac{4}{3}$.

Przykład 6.12. Aby rozwiązać równanie: $|x^2 - 4x + 1| = 2$, musimy rozwiązać dwa równania kwadratowe:

$$x^2 - 4x + 1 = 2 \vee x^2 - 4x + 1 = -2$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0 \vee x^2 - 4x + 3 = 0.$$

W rezultacie otrzymujemy cztery możliwe rozwiązania: $x = 2 - \sqrt{5} \vee x = 2 + \sqrt{5} \vee x = 1 \vee x = 3$.

Przykład 6.13. Równanie $|3x - x^2| = 0$ sprowadza się do $3x - x^2 = 0$, co bardzo łatwo daje się rozwiązać, bo jest to równanie tożsame z: $x(3 - x) = 0$. Czyli mamy dwa rozwiązania $x = 0 \vee x = 3$.

Przykład 6.14. Równanie $|4x + 1| = -3$ zgodnie z podanym faktem jest sprzeczne.

6.3 Nierówności z wartością bezwzględną.

Po rozważaniach dotyczących prostych równań z wartością bezwzględną, przyszedł czas na proste nierówności w których występuje wartość bezwzględna.

Definicja 6.15 (nierówność podstawowa z wartością bezwzględną)**.** Pojęciem nierówności podstawowej z wartością bezwzględną, będziemy określać nierówności postaci: $|\text{coś}| > a$, $|\text{coś}| \geqslant a$, $|\text{coś}| < a$ lub $|\text{coś}| \leqslant a$. Zakładamy, że a jest dowolną, ustalną liczbą rzeczywistą.

Przykład 6.16. Rozwiążemy prostą nierówność $|x| > 2$. Jeśli przypomnimy sobie definicję wartości bezwzględnej podaną w tym rozdziale, możemy powiedzieć, że dana nierówność opisuje zbiór takich punktów na osi liczbowej, których odległość od zera jest większa od 2. Aby „zobaczyć” rozwiązanie wysraczy wykonać prosty rysunek (wykonaj go!) i odczytać odpowiedź: $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Przedstawimy poniżej fakty, które właściwie bazują na rozumowaniu z powyższego przykładu i umożliwiają rozwiązanie wszystkich nierówności podstawowych.

Fakt 6.17. *Załóżmy, że a jest dowolną, ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią. Wówczas mamy:*

1. *Nierówność* $|coś| > a$ *jest równoważna warunkom:* $coś > a$ *lub* $coś < -a$.
2. *Nierówność* $|coś| \geqslant a$ *jest równoważna warunkom:* $coś \geqslant a$ *lub* $coś \leqslant -a$.
3. *Nierówność* $|coś| < a$ *jest równoważna warunkom:* $-a < coś < a$.
4. *Nierówność* $|coś| \leqslant a$ *jest równoważna warunkom:* $-a \leqslant coś \leqslant a$.

Fakt 6.18. *Załóżmy, że a jest dowolną, ustaloną liczbą rzeczywistą ujemną. Wówczas mamy:*

1. *Nierówność* $|coś| > a$ *jest równoważna zapisowi:* $coś \in \mathbb{R}$.
2. *Nierówność* $|coś| \geqslant a$ *jest równoważna zapisowi:* $coś \in \mathbb{R}$.
3. *Nierówność* $|coś| < a$ *jest sprzeczna.*
4. *Nierówność* $|coś| \leqslant a$ *jest sprzeczna.*

Fakt 6.19. *Załóżmy, że* $a = 0$. *Wówczas mamy:*

1. *Nierówność* $|coś| > a$ *jest równoważna zapisowi:* $coś \neq 0$.
2. *Nierówność* $|coś| \geqslant a$ *jest równoważna zapisowi:* $coś \in \mathbb{R}$.
3. *Nierówność* $|coś| < a$ *jest sprzeczna.*
4. *Nierówność* $|coś| \leqslant a$ *jest równoważna zapisowi:* $coś = 0$.

Problem 6.20. Podaj interpretację geometryczną każdego z przypadków powższych faktów.

Korzystając z podanych faktów, pokażemy teraz jak rozwiązać proste nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 6.21. Rozważmy nierówność: $|4x-3| > 1$, Jest ona równoważna warunkom:

$$4x-3 < -1 \vee 4x-3 > 1.$$

Stąd mamy:

$$x < \frac{1}{2} \vee x > 1.$$

Czyli rozwiązaniem nierówności jest: $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$.

Przykład 6.22. Rozważmy nierówność: $|3-x| \leqslant 2$. Korzystając z podanych wcześniej własności, wiemy że podana nierówność jest równoważna nierówności $|x-3| \leqslant 2$. Taka nierówność natomiast jest równoważna dwóm warunkom, które w skrócie zapisujemy:

$$-2 \leqslant x-3 \leqslant 2.$$

Aby otrzymać rozwiązanie wystarczy dodać do wszystkich stron nierówności liczbę 3, co daje nam zapis: $1 \leqslant x \leqslant 5$. Stąd mamy odpowiedź: $x \in \langle 1, 5\rangle$,

6.4 Przekształcenia wykresów funkcji z użyciem wartości bezwzględnej.

Przypuśćmy, że dana jest funkcja $f(x)$ oraz wiemy jak wygląda jej wykres. Zastanówmy się jak będzie wyglądać wykres funkcj g danej wzorem $g(x) = |f(x)|$. Otóż jeśli dla pewnej wartości argumentu x wartość funkcji f jest nieujemna (dodatnia lub równa zero), to nałożenie wartości bezwzględnej niczego nie zmieni. Nastomiast jeśli dla pewnej wartości x wartości $f(x)$ jest ujemna, to wówczas wartość $g(x)$ będzie liczbą przeciwną do $f(x)$.

Fakt 6.23 (o wykresie funkcji z nałożoną wartością bezględną „na funkcję”). *Aby uzyskać wykres funkcji $y = |f(x)|$ z wykresu funkcji $f(x)$ postępujemy w następujący sposób:*

- *Punkty które leżą nad osią OX (lub na niej) pozostawiamy niezmienione.*

- *Punkty które leżą pod osią OX odbijamy symetrycznie względem tej osi - czyli mówiąc potocznie odbijamy je do góry.*

Ćwiczenie: Narysuj wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Następnie korzystając z powyższego faktu narysuj wykres funkcji: $g(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

Zastanówmy się teraz jak, mając dany wykres funkcji $f(x)$ narysować wykres funkcji g danej wzorem $g(x) = f(|x|)$. Jeśli argument x jest nieujemny (tzn. $x \geqslant 0$) to oczywiście $g(x) = f(x)$ czyli wykres (dla $x \geqslant 0$ czyli po prawej stronie osi OY) pozostawiamy niezmieniony. Ponadto wiemy napewno, że funkcja $g(x)$ jest funkcją parzystą (bo dla każdego x z dziedziny mamy: $g(-x) = f(|-x|) = f(x) = g(x)$). Zatem lewą stronę wykresu (względem osi OY) stanowi lustrzane odbicie strony prawej.

Fakt 6.24 (o wykresie funkcji z nałożoną wartością bezwzględną „na argument”)**.** *Aby uzyskać wykres funkcji $y = f(|x|)$ należy wyrzucić lewą stronę wykresu $y = f(x)$. Prawą stronę wykresu pozostawiamy bez zmian i odbijamy symetrycznie, tak aby otrzymać wykres funkcji parzystej.*

Ćwiczenie: Narysuj wykresy funkcji $f(x) = 3x - 1$. Następnie korzystając z powyższego faktu narysuj wykres funkcji: $g(x) = f(|x|) = 3|x| - 1$.

Ćwiczenie: Narysuj wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Następnie korzystając z powyższego faktu narysuj wykres funkcji: $g(x) = f(|x|) = |x|^2 - 4|x| + 3$.

Uwaga 6.25. Ze względu na to, że $|x|^2 = x^2$, zapisy $h(x) = x^2 - 6|x| + 8$ oraz $h(x) = |x|^2 - 6|x| + 8$ są równoważne. Bez względu na stosowany zapis, postępujemy zgodnie z tym co podano w powyższym fakcie.

Uwaga 6.26. Ponieważ wiemy, że $\sqrt{x^2} = |x|$, zatem funkcja g dana wzorem: $g(x) = \sqrt{[f(x)]^2}$ jest równa funkcji $|f(x)|$.

Przykład 6.27. Zastanówmy się jak narysować wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}$. Przekształćmy wyrażenie podpierwiastkiem: $x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2$. Widać więc, że $\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} = \sqrt{(x^2 - 2)^2} = |x^2 - 2|$. Wystarczy więc naszkicować wykres funkcji $y = x^2 - 2$ i zastosować odpowiedni z faktów podanych wyżej.

6.5 Zadania

Zadanie 6.1. Rozwiąż równanie:

a) $|3x + x^2| = 2$,

b) $|2x - 4| = 5$,

c) $|4x^2 + 5x - 7| = -2$,

d) $|2 - 5x| = 0$.

Zadanie 6.2. W zależności od parametru m podaj liczbę rozwiązań równania:

a) $|2x - 4| = m$,

b) $|x^2 - 5x + 4| = m$,

c) $x^2 - 5|x| + 4 = m$,

d) $3|x| - 2 = m + 1$,

e) ($\star$) $2|x^2 + 3x - 4| + m = 3$,

Zadanie 6.3. Rozwiąż podane nierówności:

a) $|3x + 6| \leqslant 9$,

b) $2|x| < 2$,

c) $|x| - 1 \leqslant 0$,

d) $|x - 4| > 6$,

e) $2|x| + 2 \geqslant |x|$,

f) $|x| - 2 \geqslant 2|x|$,

g) $|4x^2 - 4x + 3| < 2$,

h) $|x^2 + 6x - 1| > 15$,

i) $(x - 2)^2 \leqslant 1$.

Zadanie 6.4. Wierzchołkiem paraboli $y = x^2 + bx + c$ jest punkt P. Podaj liczbę rozwiązań równania $|x^2 + bx + c| = 3$, jeśli:

a) $P = (1, -1)$,

b) $P = (1, -3)$,

c) $P = (1, 3)$,

d) $P = (1, 6)$.

Odpowiedź znajdź posługując się interpretacją gemometryczną!

Zadanie 6.5. Narysuj wykres funkcji:

a) $f(x) = |4x^2 - 3|$,

b) $f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}$,

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$,

d) $f(x) = 3x^2 - 2|x| - 1$,

e) $f(x) = -2x^2 - |x| + 3$.

Rozdział 7

Wielomiany

7.1 Podstawowe pojęcia

Definicja 7.1. Wielomianem stopnia n ($n \in \mathbb{N}$) będziemy nazywać każdą funkcję $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n \neq 0$ oraz $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Liczby $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ zwykło nazywać się współczynnikami. Liczba a_0 często nazywana jest również wyrazem wolnym.

Przykład 7.2. Funkcja $W(x) = 3x^7 + 4x - 2$ jest wielomianem stopnia 7.

Przykład 7.3. Funkcja $W(x) = (m-3)x^6 + 4x^5 - 3x + 14$ jest wielomianem, ale stopień tego wielomianu zależy od wartości parametru m: dla $m \neq 3$ stopień $W(x)$ wynosi 6 natomiast dla $m = 3$ stopień $W(x)$ wynosi 5.

Uwaga 7.4 (funkcja liniowa i kwadratowa jako wielomiany)**.** Funkcje liniowa i kwadratowa są wielomianami. Funkcja kwadratowa jest wielomianem stopnia 2, funkcja liniowa postaci $f(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$ jest oczywiście wielomianem stopnia 1, jeśli $a = 0$ oraz $b \neq 0$ to jest to wielomian stopnia 0. Dodatkowo przyjmuje się, że funkcja $f(x) = 0$ też jest wielomianem, a jego stopień wynosi $-\infty$.

7.2 Wykresy i własności wielomianów

Wykresem wielomianu jest krzywa, która przypomina nieskończenie długi drut, który dla prostoty, będziemy w tej książce określać jako „wężyk". Warto wiedzieć, że dla każdego wielomianu zachodzi kilka faktów odnośnie jego wykresu i własności:

- ilość miejsc zerowych wielomianu nie przekracza jego stopnia,
- ilość ekstremów lokalnych wielomianu jest mniejsza od jego stopnia.

Co więcej wiemy, że:

a) jeśli stopień wielomianu n jest parzysty, to:

- oba ramiona „wężyka” są skierowane w tą samą stronę (gdy $a_n > 0$ to w górę, a gdy $a_n < 0$ to w dół),
- może w ogóle nie być miejsc zerowych,
- jest nieparzysta ilość ekstremów, tzn. jedno, trzy, ... lub $n - 1$.

b) jeśli stopień wielomianu n jest nieparzysty, to:

- jedno ramię „wężyka” jest skierowane w górę, a drugie w dół (kierunek prawego ramienia wyznaczamy z współczynnika a_n),
- musi być przynajmniej jedno miejsce zerowe,
- jest parzysta ilość ekstermów lokalnych (tyle samo maksimów co minimów), tzn: zero, dwa, ..., lub $n - 1$.

Fakt 7.5. *Wielomian jest funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy „składa się” wyłącznie z potęg parzystych (np. $W(x) = ax^6+bx^4+cx^2+d$). Wielomian jest funkcją nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy „składa się” wyłącznie z potęg nieparzystch (np. $Q(x) = ax^7 + bx^3 + cx$).*

Uwaga 7.6. Wyraz wolny wielomianu to oczywiście potęga zerowa, czyli parzysta.

Wniosek: Jeśli we wzorze wielomianu występują zarówno potęgi parzyste jak i nie parzyste, to nie jest on określony względem parzystości (nie jest, ani parzysty, ani nieparzysty).

7.2.1 Wielomian trzeciego stopnia

Podczas rozwiązywania różnych zadań często mamy doczynienia z wielomianem stopnia 3. Ze względu na jego szczególny charakter, poniżej zebrano różne jego własności. Należy jednak zaznaczyć, że zazwyczaj odnoszą się one tylko do wielomianów stopnia trzy.

Własności wielomianu trzeciego stopnia. Wielomian trzeciego stopnia ma następujące własnoći:

1. Wielomian stopnia 3 może mieć jedynie jedno, dwa lub trzy miejsca zerowe.
2. Wielomian stopnia 3 albo ma dwa eksterema (jedno minimum i jedno maksimum) albo nie ma ich wcale (i wtedy jest funkcją monotoniczną). Zauważmy, że jeśli wielomian ma postać $W(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ oraz $a \neq 0$, to pochodna tego wielomianu ma postać: $W'(x) = 3ax^2+2bx+c$. Możemy policzyć Δ dla pochodnej. Jeśli Δ jest dodatnia, to pochodna ma dwa miejsca zerowe, więc badany wielomian ma dwa ekstrema. Jeśli jednak $\Delta \leqslant 0$ to badany wielomian W jest monotoniczy (pochodna ma stały znak) i w zależności od wartości a może być stale rosnący lub stale malejący.

Problem 7.7. Zastanów się ile miejsc zerowych może mieć dowolna funkcja (nie koniecznie wielomian!), która jest monotoniczna - to znaczy jest rosnąca, lub malejąca, lub stała w całej swej dziedzinie.

7.3 Twierdzenia dotyczące wielomianów

W tym podrozdziale zebrano najważniejsze twierdzenia dotyczące wielomianów. Zapoznaj się z treścią tych twierdzeń i sprawdź czy dokładnie rozumiesz ich treść. Dobre poznanie tych twierdzeń jest o tyle ważne, że większość zadań o wielomianach (lub zadań w których w jakiejś postaci pojawiają się wielomiany) wymaga użyć niektórych z nich.

Twierdzenie 7.8 (o rozkładzie)**.** *Każdy wielomian można rozłożyć na iloczyn czynników stopnia nie większego niż 2.*

Przykład 7.9. Rozłożymy kilka wilomianów na czynniki.

1. $x^6 - 6x^5 + 9x^4 = x^4(x^2 - 6x + 9) = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (x - 3) \cdot (x - 3)$,
2. $6x^5 - x^4 + x^3 = x \cdot x \cdot x \cdot (6x^2 - x + 1)$,
3. $x^4+x^2+1 = (x^4+2x^2+1)-x^2 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2+1-x)(x^2+1+x)$.

Twierdzenie 7.10 (o dzieleniu wielomianów)**.** *Jeśli wielomian $W(x)$ dzielimy przez $Q(x)$ i dostajemy wynik $P(x)$ i resztę $R(x)$, to:*

$$W(x) = P(x)Q(x) + R(x).$$

Co więcej stopień $R(x)$ jest mniejszy niż stopień $Q(x)$.

Twierdzenie 7.11 (twierdzenie Bezoute'a)**.** *Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x-a)$.*

Twierdzenie 7.12 (rozszerzone twierdzenie Bezoute'a)**.** *Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x-a)$ wynosi $W(a)$.*

Twierdzenie 7.13 (o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikiach całkowitych)**.** *Jeśli liczba $\frac{p}{q}$, gdzie p, q to liczby całkowite, jest pierwiastkiem wielomianu $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie wszystkie współczynniki są całkowite, to p jest podzielnikiem a_0, natomiast q jest podzielnikiem a_n,*

7.4 Wiadomości dodatkowe

7.4.1 Równość wielomianów

Definicja 7.14 (równość wielomianów)**.** Mówimy, że dwa wielomiany są równe, gdy są tego samego stopnia oraz gdy mają takie same współczynniki przy wszystkich potęgach.

Przykład 7.15. Wielomiany $W(x) = x^4 + 3x^2 - 7$ jest równy wielomianowi $V(x) = kx^5 + x^4 + ax^2 - 7$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 0$ oraz $a = 3$.

Fakt 7.16 (o równości wielomianów)**.** *Jeśli dwa wielomiany stopnia conajwyżej n mają takie same wartości dla $n+1$ argumentów, to są równe.*

Przykład 7.17. Załóżmy, że wielomiany: $W(x) = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$ oraz $G(x) = 5x^2 - 19x = 18$ są równe. Zastanówmy się jakie w takim razie muszą być wartości parametrów a, b, c.

Po pierwsze zauważmy, że wielomian G jest stopnia 2, natomiast wielomian W jest stopnia co najwyżej 2. W takim razie, korzystając z poprzedniego faktu, wystarczy sprawdzić czy wielomiany przyjmują takie same wartości dla przynajmniej trzech różnych argumentów. Oczywiście argumenty te mogą być dowolne, jednak my wybierzemy takie, aby łatwo można było wyliczyć wartości $W(x)$ oraz $G(x)$. Weźmy więc: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_2 = 3$ (wybór jest taki, ze względu na wielomian W, w którym podstawienie 1, 2 lub 3 zeruje niektóre składniki!).

Skoro W i G są równe to oczywiście musi być spełniony układ:

$$\begin{cases} W(1) = G(1) \\ W(2) = G(2) \\ W(3) = G(3) \end{cases}$$

Znamy wzory na $W(x)$ i $G(x)$, więc korzystając z nich możemy zapisać (podstawiając odpowiednie wartości):

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ -b = 0 \\ 2c = 6 \end{cases}$$

Co daje nam odpowiedź: $a = 2$, $b = 0$, $c = 3$.

7.4.2 Wielokrotne pierwiastki wielomianu

Definicja 7.18 (k-krotny pierwiastek wielomianu)**.** Liczbę a nazywamy k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, gdy w jego rozkładzie występuje czynnik $(x-a)^k$ i nie występuje czynnik $(x-a)^{k+1}$. Innymi słowy, jeśli a jest k-krotnym pierwiastkiem wielominau $W(x)$, to wielomian ten dzieli się przez $(x-a)^k$, ale nie dzieli się przez $(x-a)^{k+1}$.

Fakt 7.19. *Liczba a jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:*

$$\begin{cases} W(a) = 0 \\ W'(a) = 0 \\ \vdots \\ W^{(k-1)}(a) = 0 \\ W^{(k)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

W powyższym zapisie przez $W^{(n)}(x)$ oznaczmy n-tą pochodną wielomianu $W(x)$.

Przykład 7.20. Liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 2$. Sprawdzimy ile wynosi krotność tego pierwiastka. Najpierw przekonajmy się, czy rzeczywiście -1 jest pierwiastkiem:

$$W(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 + 2 - 2 = 0.$$

Łatwo policzyć pierwszą pochodną tego wielomianu - ma ona postać: $W'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 2$. Sprawdźmy czy -1 jest również pierwiastkiem pochodnej:

$$W'(x) = 5 - 4 + 3 - 2 - 2 = 0.$$

Policzmy teraz drugą pochodną (czyli pochodną pochodnej): $W''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2$. Co daje nam:

$$W''(x) = -20 + 12 - 6 + 2 \neq 0.$$

Na mocy faktu dowiedliśmy więc, że liczba -1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Definicja 7.21. Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Wówczas liczbę a_0 nazywamy wyrazem wolnym, natomiast liczbę równą $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ sumą współczynników wielomianu W.

Fakt 7.22. *Dla dowolnego wielomianu $W(x)$ zachodzi:*

1. *wyraz wolny jest równy $W(0)$,*
2. *suma współczynników jest równa $W(1)$,*
3. *wykres wielomianu przecina oś OY w punkcie $(0, a_0)$.*

Problem 7.23. Zastanów się, jak można udowodnić powyższy fakt.

Przykład 7.24. Policzymy teraz wyraz wolny i sumę współczynników wielomianu $W(x) = (x-4)^3(x^2-16)$. Oczywiście można by wymnożyć wszystkie składniki tego iloczynu (podnosząc wcześniej $(x-4)$ do potęgi trzeciej), jednak zajęłoby to dużo czasu. My możemy skorzystać ze znanych nam już twierdzeń i faktów. Po pierwsze jest to wielomian stopnia 5 (czy wiesz dlaczego?). Wyraz wolny, na mocy poprzedniego faktu, równa się wartości $W(0)$. Mamy więc:

$$a_0 = W(0) = 4^3 \cdot 16 = 4^5 = 1024.$$

Suma współczynników $a_5 + a_4 + \ldots + a_1 + a_0$, na mocy faktu, równa jest wartości $W(1)$, Stąd mamy:

$$a_5 + a_4 + \ldots + a_1 + a_0 = W(1) = (-3)^3 \cdot (-15) = 405.$$

Problem 7.25. Zastanów się jak, dla podanego w powyższym przykładzie wielomianu, wyliczyć sumę współczynników przy parzystych i nieparzystych potęgach (czyli odpowiedzieć na pytanie ile wynosi $a_5 + a_3 + a_1$ oraz $a_4 + a_2 + a_0$). Wskazówka: użyj wartości $W(1)$ oraz $W(-1)$.

Fakt 7.26. *Wielomian zmienia znak tylko w pierwiastkach o nieparzystej krotności. W pierwiastkach krotności parzystej nasz „wężyk” nie przecina osi OX ale jest do niej styczny.*

7.4.3 Uogólnione wzory Viete'a

Okazuje się, że wzory Viete'a podane w rozdziale o funkcji kwadratowej, da się uogólnić dla wielomianów stopnia wyższego niż 2. W tym podręczniku ograniczym się do podania tych wzorów jedynie dla wielomianów stopnia trzeciego, jednak należy mieć świadomość, że podobne wzory można wyprowadzić dla wielomianów stopni wyższych.

Fakt 7.27 (wzory Viete'a dla wielomanów stopnia trzeciego)**.** *Niech* $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *będzie wielomianem stopnia* 3*, oraz niech liczby* x_1, x_2, x_3 *są pierwiastkami tego wielomianu. Wówczas prawdziwe są wzory:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

oraz istnieje postać lioczynowa tego wielomianu: $W(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$*.*

Przykład 7.28. Wiadomo, że wielomian dany wzorem $W(x) = x^3 + px^2 + qx = 8$ ma jeden pierwiastek podwójny (przez pierwiastek podwójny rozumiemy pierwiastek drugiego stopnia) a drugi jest do niego liczbą przeciwną. Znajdziemy teraz odpowiednie wartości parametrów p i q, dla których powyższy warunek jest prawdziwy.

Z treści warunku wynika, że wielomian W ma trzy pierwiastki: $a, a, -a$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Korzystając z wzorów Viete'a mamy, że:

$$\begin{cases} a + a + (-a) = -p \\ a \cdot a + a \cdot (-a) + (-a) \cdot a = q \\ a \cdot a \cdot (-a) = -8 \end{cases}$$

Stąd mamy:

$$\begin{cases} a = -p \\ -a^2 = q \\ a^3 = 8 \end{cases}$$

Czyli:

$$\begin{cases} a = 2 \\ p = -2 \\ q = -4 \end{cases}$$

Wobec czego wielomian możemy zapisać w postaci: $W(x) = (x-2)^2(x+2)$.

7.5 Zadania

Zadanie 7.1. Sprawdź czy wielomian jest $W(x) = 8x^3 - 27$ równy wielomianowi:

a) $P(x) = (2x - 3)^3$,

b) $P(x) = 2x(4x^2 - 9) + 9(2x - 3)$.

Zadanie 7.2. Podany wielomian W rozłóż na czynniki, znajdź wszystkie jego pierwiastki, podaj ich krotności i naszkicuj wykres tego wielomianu.

a) $W(x) = 5x^5 - 20x^4$,

b) $W(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$.

Zadanie 7.3. Wykonaj dzielenie wielomianów W przez Q i zapisz go w postaci: $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$:

a) $W(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 3$, $Q(x) = x + 1$,

b) $W(x) = -3x^4 + 5x^3 + x^2 + 10x + 6$, $Q(x) = x^2 + 2$.

Zadanie 7.4. Nie wykonując dzielenia oblicz resztę z dzielenia $W(x)$ przez $Q(x)$:

a) $W(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $Q(x) = x - 2$,

b) $W(x) = x^{10} - 1$, $Q(x) = -x^2 + x$,

c) $W(x) = (x - 2)^6$, $Q(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Zadanie 7.5. Dla jakich wartości paramterów a i b wielomian $W(x) = 3x^3 + 4x^2 - 13x + 6$ jest równy:

a) $W(x) = ax^3 + 2bx^2 - 13x + 6$,

b) $W(x) = (x + 3)(ax^2 - bx + a - b)$.

Zadanie 7.6. Liczba $-\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem $W(x) = 12x^5 + 8x^4 + 11x^3 + 7x^2 - x - 1$. Oblicz krotność tego pierwiastka. Znajdź pozostałe pierwiastki.

Zadanie 7.7. Wyznacz p i q tak, aby liczba 1 była dwukrotnym pierwiastkiem równania: $x^3 - 2x^2 + px + q = 0$. Zadanie rozwiąż przynajmniej na dwa sposoby!

Zadanie 7.8. Zbadaj parzystość wielomianów:

a) $W(x) = 2x^2 - x$,

b) $W(x) = x^3 - 4x^2 + 1$,

c) $f(x) = 4x^4 + 3x^2 - 1$,

d) $f(x) = x^5 - 3x^3 - 7$.

Zadanie 7.9. Jaki warunek muszą spełniać współczynniki wielomianu trzeciego stopnia: $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, aby był on funkcją nieparzystą? Czy może on być funkcją parzystą?

Zadanie 7.10 (*)**.** Wyznacz te wartości parametru a, dla których wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 - 4$:

a) jest funkcją rosnącą,

b) posiada dwa ekstrema lokalne,

c) ($\star$) posiada dokładnie dwa miejsca zerowe (wskazówka: możesz użyć wzorów Viete'a dla wielomianów stopnia trzeciego).

Zadanie 7.11. Rozwiąż równanie:

a) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$,

b) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$,

c) $x^4 + x^2 - 6x + 4 = 0$,

d) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 19x - 6 = 0$,

e) $2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$,

f) $9x^4 + 9x^3 + 11x^2 + 9x + 2 = 0$,

Zadanie 7.12. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-1)(x-2)(x+3) \geqslant 0$,

b) $(x^2+1)(x^2-1)(x-2)^2 < 0$,

c) $(x^2-1)^3(x^4+2) > 0$,

d) $(x-1)^2(x+3)^3 \geqslant 0$,

e) $(x-4)^2(x^2-16) \leqslant 0$,

f) $x^2(x-3)(x+1) \leqslant 0$,

g) $-x(x-2)^2 \geqslant 0$,

h) $-2(x+1)^2(x-1) \leqslant 0$.

Zadanie 7.13. Rozwiąż nierówność:

a) $-x^3 - 2x^2 + 6x < 0$,

b) $-x^4 + x^3 + 7x^2 \geqslant 0$,

c) $x^3 - x^2 - 7x \leqslant 0$,

d) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 > 0$,

e) $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 \leqslant 0$,

f) $x^3 + 3x^2 + x - 1 \leqslant 0$.

Zadanie 7.14. Podaj przykład wielomianu, którego jedynymi pierwiastkami są liczby $-3, 2, 4$ i którego stopnień jest równy:

a) 3,

b) 4,

c) 6.

Rozdział 8

Funkcja homograficzna

Definicja 8.1 (funkcja homograficzna)**.** Funkcją homograficzną nazywamy funkcję postaci:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

gdzie $c \neq 0$ oraz $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Uwaga 8.2. Zauważmy, że warunek $c \neq 0$ gwarantuje, że powyższa funkcja nie jest funkcją liniową, bo jeśli $c = 0$, to wtedy wzór funkcji przyjął by postać: $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. Drugi warunke gwarantuje natomiast, że proste występujące w liczniku i mianowniku nie są równoległe, a stąd, że wyrażenie $\frac{ax+b}{cx+d}$ jest nieskracalne.

8.1 Wykres funkcji homograficznej

Wykresem każdej funkcji homograficznej jest hiperbola. Składa się ona z dwóch rozłącznych gałęzi „uwiązanych” pomiędzy asymptotami. Każda hiperbola ma dwie osie symetrii oraz punkt symetrii.

Fakt 8.3 (o asymptotach)**.** *Funkcja homograficzna* $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ *ma dwie asymptoty:*

- *pionową, daną równaniem* $x = -\frac{d}{c}$*,*
- *poziomą, daną równaniem* $y = \frac{a}{c}$*.*

Algorytm rysowania wykresów funkcji homograficznych. Aby narysować przybliżony wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ należy:

1. wyznaczyć i narysować asymptoty tego wykresu,
2. wyznaczyć przynajmniej jeden punkt tego wykresu (wstawiając za x dowolną liczbę, dla której łatwo wyliczyć wartość $f(x)$, oraz wszystkie punkty symetryczne do tego punktu,
3. naszkicować asymptotę przechodzącą przez otrzymane punkty, pamiętając o asymptotach.

Przykład 8.4. Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ należy:

1. narysować asymptoty $x = 1$ oraz $y = 3$,
2. ponieważ $f(0) = 0$, to zaznaczamy punkt $(0, 0)$ oraz punkty do niego symetryczne, czyli: $(-2, 2)$, $(4, 4)$, $(2, 6)$,
3. rysujemy kolejno każdą z gałęzi pamiętając o dążeniu do asymptot.

Uwaga 8.5. Częstym problemem jest znalezienie punktu symetrycznego do danego. Pomocny może być następujący algorytm. Po pierwsze orientujemy zadany punkt względem punktu przecięcia się asymptot. W powyższym przykładzie punkt $(0, 0)$ leży 1 w lewo, 3 w dół od punktu przecięcia asymptot. Pierwszy punkt otrzymamy przestawiając same liczby, tzn biorąc punkt który jest 3 w lewo i 1 w dół od punktu przecięcia asymptot. Jest to punkt $(-2, 2)$. Następne dwa punkty otrzymamy przez zamianę „w lew" na „w prawo" (i odwrotnie) oraz „w górę" na „w dół" (i odwrotnie), czyli dokładnie: 1 w prawo, 3 w górę (punkt $(2, 6)$) oraz 3 w prawo i 1 w górę (punkt $(4, 4)$).

8.2 Hiperbole podstawowe

Aby uzyskać dokładniejszy wykres funkcji homograicznej, trzeba nauczyć się najpierw rysować wykresy typu $y = \frac{B}{x}$, gdzie $B \neq 0$.

Asymptotami tych wykresów są osie układu współrzędnych, osiami symetrii proste: $y = x$ oraz $y = -x$, a środkiem symetrii jest punkt $(0, 0)$. Każda z tych funkcji jest nieparzysta.

Przykład 8.6. Narysujmy wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$. Wstawiamy za x liczby łatwe do obliczeń i dostajemy na przykład następujące punkty wykresu: $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 2)$. Pozwala to naszkicować prawą gałąź hiperboli. Korzystając z nieparzystości możemy zaznaczyć na wykresie punkty: $(-1, -1)$, $(-2, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -2)$ i rysujemy lewą gałąź.

Przykład 8.7. Narysujmy teraz wykres funkcji $y = \frac{6}{x}$. Tu wygodnie jest podstawiać za x kolejne podzielniki liczby 6, co daje nam następujące punkty: $(1,6)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(6,1)$. Dalej postępujemy tak jak w poprzednim przykładzie.

Przykład 8.8. Teraz narysujmy wykres $y = -\frac{4}{x}$. Za x wstawiamy podzielniki liczby 4: $(1,-4)$, $(2,-2)$, $(4,-1)$. Dalej postępujemy tak jak w poprzednich przykładach.

Uwaga 8.9. Zauważmy, że hiperbola otrzymana w ostatnim z przykładów jest inaczej umiejsowiona w układzie współrzędnych niż dwie poprzednie. Rzeczywiście jeśli $B > 0$ to hiperbola $y = \frac{B}{x}$ leży w I i III ćwiartce, natomiast gdy $B < 0$ to hiperbola ta leży w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

8.3 Własności funkcji homograficznej

Fakt 8.10. *Każdą funkcję homograficzną $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ można zapisać w postaci:*

$$f(x) = A + \frac{B}{x - C}, \quad \textit{gdzie } B \neq 0.$$

Uzasadnienie: Rzeczywiście, wystarczy najpierw podzielić licznik i mianownik przez c, co daje $f(x) = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$ a następnie, np. podzielić pisemnie $(\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}) : (x + \frac{d}{c})$. Wtedy $A = \frac{a}{c}$, $C = -\frac{d}{c}$, natomiast B jest resztą z tego dzielenia.

Przykład 8.11. Pokażemy praktyczne zastosowanie powyższego faktu:

- funkcję $f(x) = \frac{4x+3}{x-1}$ można przedstawić również jako $f(x) = 4 + \frac{7}{x-1}$,
- funkcję $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ można przedstawić również jako $f(x) = 3 + \frac{-2}{x+1}$,
- funkcję $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$ można przedstawić również jako $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{4}}{x - \frac{1}{2}}$.

Przedstawienie funkcji homograficznej w postaci z powyższego faktu okazuje się bardzo pożyteczne, jeśli chcemy wykonać szybko i dość dokładnie wykres funkcji homograficznej. Mianowicie, aby narysować wykres funkcji homograficznej, mając ją w postaci $f(x) = A + \frac{B}{x-C}$, postępujemy w następujący sposób:

1. zaznaczamy asymptoty, które są poastaci: $x = C$ oraz $y = A$,

2. traktując asymptoty jako „nowy układ współrzędnych” rysujemy wykres funkcji $y = \frac{B}{x}$, korzystając z metody pokazanej w poprzednim podrozdziale.

Uwaga 8.12. Powyższa metoda jest poprawna, ponieważ rysowanie wykresu $y = \frac{B}{x}$ w „nowym układzie współrzędnych” jest tożsame z przesunięciem funkcji $y = \frac{B}{x}$ o wektor $\vec{u} = [C, A]$.

Fakt 8.13 (własności funkcji homograficznej)**.** *Jeśli* $f(x) = A + \frac{B}{x-C}$, *gdzie* $B \neq 0$, *to:*

1. *Dziedziną funkcji* f *jest zbiór:* $\mathbb{R}\backslash\{C\}$, *natomiast zbiorem wartości:* $\mathbb{R}\backslash\{A\}$.
2. *Funkcja* f *nie jest monotoniczna! Jest jedynie przedziałami rosnąca (gdy* $B < 0$*) lub przedziałami malejąca (gdy* $B > 0$*).*
3. *Jest to funkcja różnowartościowa, a co za tym idzie ma funkcję odwrotną, daną wzorem* $f^{-1}(x) = C + \frac{B}{x-A}$.

8.4 Zadania

Zadanie 8.1. Naszkicuj wykres funkcji bez wyliczania postaci $f(x) = A + \frac{B}{x-C}$.

a) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$,

b) $f(x) = \frac{-x+1}{x}$,

c) $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$,

d) $f(x) = \frac{2x+8}{x+3}$.

Dla każdej z funkcji podaj dziedzinę, zbiór wartości i omów monotoniczność każdej z tych funkcji.

Zadanie 8.2. Naszkicuj wykres funkcji, korzystając z postaci $f(x) = A + \frac{B}{x-C}$.

a) $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$,

b) $f(x) = \frac{-2x+5}{x-3}$,

c) $f(x) = \frac{4x}{2x-1}$,

d) $f(x) = \frac{2}{x+3}$,

e) $f(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$,

f) $f(x) = \frac{3x-7}{x-2}$.

Zadanie 8.3. Naszkicuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$,

b) $f(x) = \left|\frac{1}{x-1}\right|$,

c) $f(x) = \frac{1}{|x|+2} - 1$,

d) $f(x) = \left|\frac{1}{x+2} - 1\right|$,

e) $f(x) = \left|\frac{1}{|x|} - 4\right|$.

Zadanie 8.4. Określ liczbę rozwiązań równania:

$$\left|\frac{4}{|x|} - 2\right| = m$$

w zależności od m. Narysuj wykres funkcji $y = g(m)$, gdzie $g(m)$ oznacza ilość rozwiązań powyższego równania przy danym m.

Zadanie 8.5. Wykonaj polecenie z poprzedniego zadania dla równania:

$$-\left|\frac{2}{x} - 1\right| + 1 = m.$$

Zadanie 8.6. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = \frac{2}{|x|}$,

b) $f(x) = \frac{3}{|x-4|}$,

c) $f(x) = \frac{1}{|3-x|} + 1$.

Zadanie 8.7. Wykres funkcji f przesuń o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór otrzymanej funkcji. Okreś jej dziedzinę, zbiór wartości, asymptoty i miejsca zerowe:

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\vec{u} = [0, 3]$,

b) $f(x) = \frac{2}{x}$, $\vec{u} = [-2, -1]$,

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $\vec{u} = [\frac{1}{2}, 0]$.

Zadanie 8.8. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)$, podaj równanie osi symetrii wykresu oraz współrzędne środka symetrii:

a) $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$,

b) $f(x) = -\frac{1}{x+3}$,

c) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$,

d) $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$,

e) $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2$,

f) ($\star$) $f(x) = \frac{2}{-x+4} + 2$.

Rozdział 9

Funkcja wymierna

Definicja 9.1. Funkją wymierną nazywamy funkcje postaci:

$$f(x) = \frac{W(x)}{P(x)},$$

gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym.

Fakt 9.2. *Dziedziną naturalną funkcji* $f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$ *jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których* $P(x) \neq 0$.

Uwaga 9.3. Przypomnijmy, że dwie funkcje są równe, gdy mają te same dziedziny i wzór jednej z nich możemy sprowadzić do wzoru drugiej.

Przykład 9.4. Funkcja $f(x) = \frac{x(x-2)}{x-2}$ nie jest równa funkcji $g(x) = x$, bo ich dziedziny nie są takie same. Możemy natomiast napisać, żę $f = h$, gdzie $h(x) = x$, dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Wniosek: Pamiętaj - zanim zaczniesz upraszczać (lub przekształcać) wzór jakiejkolwiek funkcji, ustal jaka jest jej dziedzina!

9.1 Równania wymierne

Aby szybko i sprawnie rozwiązać równanie wymierne (czyli takie, w której przynajmniej po jednej stronie równości znajduje się funkcja wymierna), można skorzystać z poniższego algorytmu. Tak podany algorytm gwarantuje znalezienie rozwiązania każdego równania wymiernego, przy założeniu, że umiemy rozwiązywać równania wielomianowe odpowiedniego stopnia.

Algorytm rozwiązywania równań wymiernych.

1. Wypisujemy założenia i w razie potrzeby rozwiązujemy je. (Mogą tu pojawić się nierówności, bądź wykluczenia pewnych podzbiórów z dziedziny. Czasem wynika to z treści zadania, a czasem z samego równania.)
2. Mianowniki występujących ułamków (jeśli jest ich kilka) rozkładamy na czynniki tak aby łatwo było określić najmniejszy wspólny mianownik.
3. Mnożymy obie storny równania przez najmniejszy wspólny mianownik, tak aby otrzymać równanie wielomianowe.
4. Rozwiązujemy równanie wielomianowe.
5. Uwzględniającą założenia i warunki z punktu 1, podajemy rozwiązanie.

Przykład 9.5. Rozwiążemy równanie:

$$\frac{6-3x}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x+2}.$$

Będziemy postępować zgodnie z podanym wyżej algorytmem:

1. Założenia: $x^2 + x - 2 \neq 0, x - 1 \neq 0, x + 2 \neq 0$. Z warunków tych dostajemy: $x \in \mathbb{R} \backslash \{-2, 1\}$.
2. $$\frac{6-3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x+2}.$$
3. Mnożymy obustronnie przez $(x-1)(x+2)$ i dostajemy:
$$6 - 3x = x + 2 - x(x-1).$$
4. Porządkujemy równanie do postaci: $x^2 - 5x + 4 = 0$ i rozwiązujemy. Orztymujemy dwa pierwiastki rzeczywiste: $x_1 = 1 \vee x_2 = 4$.
5. Biorąc pod uwagę założenia z punktu 1, okazuje się że tylko $x = 4$ jest rozwiązaniem danego równania wymiernego.

W ten sposób otrzymaliśmy odpowiedź: $x = 4$.

9.2 Nierówności wymierne.

Podobnie jak w przypadku równań, pokażemy prosty i skuteczny algorytm, który pozwala rozwiązywać nierówności wymierne. Tak jak poprzednio idea algorytmu opiera się na sprowadzeniu danej nierówności wymiernej do odpowiedniej nierówności wielomianowej.

Algorytm rozwiązywania nierówności wymiernych.

1. Wypisujemy założenia i rozwiązujemy je.
2. Wszystkie składniki przenosimy na jedną ze stron nierówności i rozkładamy mianowniki występujących ułamków na czynniki (o ile się da), tak aby można było określić najmniejszy (względem stopnia) wspólny mianownik.
3. Sprowadzamy całe wyrażenie do wspólnego mianownika.
4. Licznik rozkładamy na czynniki (o ile jest to możliwe).
5. Stosując przekształcenie tożsamościowe, zastępujemy ułamek występujący z jednej strony nierówności, na wyrażenie będące iloczynem licznika i mianownika. Otrzymujemy w ten sposób nierówność wielomianową.
6. Rozwiązujemy nierówność wielomianową.
7. Uwzględniamy założenia i podajemy odpowiedź.

Przykład 9.6. Rozwiążemy nierówność:

$$\frac{12x-4}{x^2-2x-3} \leqslant \frac{3x}{x-3} - \frac{x^2}{x+1}.$$

Będziemy postępować zgodnie z podanym algorytmem.

1. Założenia: $x^2-2x-3 \neq 0$, $x-3 \neq 0$, $x+1 \neq 0$. Czyli: $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 3\}$.
2. Przenosimy wszystko na lewą stronę:
$$\frac{12x-4}{(x+1)(x-3)} - \frac{3x}{x-3} + \frac{x^2}{x+1} \leqslant 0.$$
3. Sprowadzamy wyrażenie do wspólnego mianownika:
$$\frac{12x-4-3x(x+1)+x^2(x-3)}{(x-3)(x+1)} \leqslant 0.$$
4. Rozkładamy licznik na czynniki:
$$\frac{(x-1)^2(x-4)}{(x+1)(x-3)} \leqslant 0.$$

5. Mnożymy obie strony przez kwadrat mianownika, czyli innymi słowy, zastępujemy ułamek iloczynem licznika i mianownika:

$$(x-1)^2(x-4)(x+1)(x-3) \leqslant 0.$$

6. Rozwiązujemy równanie wielomianowe (jak widać nie wymaga to żadnych dodatkowych przekształceń!). Otrzymujemy odpowiedź:

$$x \in (-\infty, -1\rangle \cup \{1\} \cup \langle 3, 4\rangle.$$

7. Uwzględniamy założenia:

$$x \in (-\infty, -1) \cup \{1\} \cup (3, 4\rangle.$$

9.3 Zadania

Zadanie 9.1. Określ dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$,

b) $f(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}$,

c) $f(x) = \frac{x^3-4x^2+1}{x^2+3x+6}$.

Zadanie 9.2. Sprawdź czy funkcje f i g są równe.

a) $f(x) = \frac{2x+2}{x+1}$, $g(x) = 2$,

b) $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{x(x-1)}$, $g(x) = x$,

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Zadanie 9.3. Pamiętając o dziedzinie, uprość wzory podanych funkcji.

a) $f(x) = \frac{(x+4)^2}{x^2+5x+4}$,

b) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$,

c) $f(x) = \frac{x^4-5x^3+6x^2}{x^3-6x^2+8x}$,

d) $f(x) = \frac{2-x}{x^2+x-2} + \frac{x}{x^2-x-6}$,

e) $f(x) = \frac{4x}{x^2-7x+12} + \frac{5x}{x^2-8x+15}$.

Zadanie 9.4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=0$,

b) $\frac{(4x-1)(x+1)(2x+1)}{4x^2-1}=0$,

c) $\frac{2x+1}{x^2-9}-\frac{3}{x-3}=0$,

d) $\frac{3}{x+2}+\frac{12}{x^2-4}+\frac{1}{2x}=0$,

e) $\frac{x+5}{x+4}+\frac{5}{x-2}=\frac{1}{x+4}$,

f) $\frac{x^2-x}{x^2+x-2}+\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}=1$.

Zadanie 9.5. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{6-x}{x^2-x}>\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}$,

b) $\frac{3x^2+5x+1}{x}\leqslant 1-x$,

c) $\frac{(x+3)(x^2-5x+6)}{(x^2-9)(x-3)}\geqslant 0$,

d) $1+\frac{2}{x-5}+\frac{1}{x+1}\geqslant\frac{-x-7}{x^2-4x-5}$,

e) $\frac{1}{x^2+2x-3}\geqslant\frac{1}{2x+1}$.

Rozdział 10

Ciąg arytemtyczny

10.1 Definicje

Ciąg arytmetyczny jest szczególnym ciągiem, który spełnia poniższą (zupełnie nie formalną) definicję.

Definicja 10.1 (ciąg arytmetyczny)**.** Ciąg arytmetyczny jest to ciąg, w którym każdy (poza pierwszym) wyraz powstaje poprzez dodanie stałej, ustalonej liczby r do wyrazu poprzedniego:

$$a_1 \longrightarrow^{+r} a_2 \longrightarrow^{+r} a_3 \longrightarrow^{+r} a_4 \longrightarrow^{+r} \dots$$

Liczbę r nazywamy wtedy różnicą ciągu arytemtycznego.

Uwaga 10.2. Ciąg arytmetyczny może być skończony bądź nieskończony. Jeśli jest to ciąg nieskończony to:

$$\text{dla każdego } n \in \mathbb{N}_+ \qquad a_{n+1} = a_n + r.$$

Jeśli ciąg jest skończony i ma powiedzmy k wyrazów, to:

$$\text{dla każdego n=1,2,3,\dots,k-1} \qquad a_{n+1} = a_n + r.$$

10.2 Własności ciągu arytmetycznego

Fakt 10.3. *Dla ciągu arytemtycznego o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r wzór ogólny ciągu ma postać:*

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Problem 10.4. Czy potrafisz udowodnić powyższy fakt? (Wskazówka: przeprowadź dowód indukcyjny).

Ciąg arytemtyczny należy utożsamiać z funkcją liniową. Zauważmy bowiem, że z faktu podanego wyżej wynika, że: $a_n = nr + a_1 - r$, Jeśli teraz, mówiąc obrazowo, zamienimy literkę n na x a literkę a na określenie jakieś funkcji, np. f to otrzymamy wzór bardzo podobny do typowego wzoru funkcji liniowej. Reasumując, ciąg arytemtyczny jest funkcją daną wzorem funkcji liniowej z dziedziną liczba naturalnych.

Fakt 10.5. *Ciąg jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy może być zadany wzorem funkcji liniowej.*

Uwaga 10.6. Trzy liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$c - b = b - a$$

a stąd $b = \frac{a+c}{2}$ (czyli wyraz środkowy jest średnią arytemtyczną wyrazów sąsiednich).

Uwaga 10.7. Ogólnie, ciąg (a_n) jest arytmetyczny, gdy dla każdego n zachodzi:

$$a_{n+1} - a_n \text{jest stałe (tzn. nie zależy od n).}$$

Przykład 10.8. Ciąg dany wzorem ogólnym $a_n = 4n - 3$ jest ciągiem arytemtycznym, bo

$$a_{n+1} - a_n = 4(n + 1) - 3 - (4n - 3) = 4.$$

Natomiast ciąg $a_n = n^2$ nie jest ciągiem arytmetycznym, gdyż:

$$a_{n+1} - a_n = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

Fakt 10.9. *Każdy ciąg arytemtyczny jest monotoniczny:*

- *jeśli $r > 0$, to ciąg jest rosnący,*
- *jeśli $r = 0$, to ciąg jest stały,*
- *jeśli $r < 0$, to ciąg jest malejący.*

10.3 Suma ciągu arytmetycznego

Fakt 10.10. *Suma k początkowych wyrazów ciągu arytemtycznego* (a_n) *jest równa:*

$$S_k = \frac{a_1 + a_k}{2}k.$$

Sens powyższego faktu jest prosty. Suma pewnej liczby koljeny wyrazów ciągu arytemtycznego równa się średniej arytmetycznej pierwszego i ostatniego z tych wyrazów, pomnożonej przez liczbę tych wyrazów.

Przykład 10.11. Korzystając z danego wzoru, policzymy następującą sumę:

$$5 + 11 + 17 + \ldots + 65.$$

Zauważmy że dodawne liczby tworzą ciąg arytemtycznych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, w którym $a_1 = 5$, $r = 6$, $a_n = 65$. Aby obliczyć liczbę wyrazów tego ciągu wykorzystamy wzór:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Zatem:

$$65 = 5 + (n-1) \cdot 6$$

$$n = 11$$

Stąd, szukana suma równa jest:

$$S_{11} = \frac{5 + 65}{2} \cdot 11 = 385.$$

Jak pokazuje przykład, ciągi arytmetyczne są często pomocne w zadaniach, w których treści nie ma mowy nic o żadnym ciągu (zauważ, że zadanie z przykładu brzmiało, „oblicz daną sumę”). Dlatego, aby ułatwić rozwiązywanie różnych zadań, w których pojawia się ciąg arytmetyczny, warto pamiętać o tym, co mówi poniższa wskazówka.

Wskazówka: W czasie rozwiązywania zadań dotyczących ciągu arytmetycznego, wszelkie „dane” i „szukane” przedstaw w postaci oznaczeń: a_1, r itp. Ułatwia to koncentrację i kojarzenie odpowiednich wzorów i relacji między wielkościami.

10.4 Zadania

Zadanie 10.1. Oblicz wyraz pierwszy, różnicę ciągu arytmetycznego i sumę 10 pierwszych wyrazów, gdy:

a) $a_6 = 20, a_{10} = 4$,

b) $a_5 = 20, a_9 = 36$,

c) $a_4 = 5, a_{11} = 34$.

Zadanie 10.2. Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnym wyrazami ciągu arytmetycznego? Podaj te wyrazy:

a) $2x - 1, 2x + 5, 3x + 4$,

b) $(x + 1)^2, (2x + 1)^2, (3x - 1)^2$.

Zadanie 10.3. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych które:

a) są podzielne przez 3,

b) są niepodzielne przez 5,

c) przy dzieleniu przez 6 dają reszte 4.

Zadanie 10.4. Czwarty wyraz ciagu arytemtycznego jest równy 6. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 10.5. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 4, a czwarty wynosi 16. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych.

Zadanie 10.6. Ciąg arytmetyczny składa się z 16 wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 256, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 240. Oblicz pierwszy i ostatni wyraz tego ciągu.

Rozdział 11

Ciąg geometryczny

11.1 Definicje

Ciąg geometryczny, podobnie jak arytmetyczny, jest szczególnym ciągiem, który spełnia poniższą (zupełnie nie formalną) definicję.

Definicja 11.1 (ciąg geometryczny)**.** Ciąg geometryczny jest to ciąg, w którym każdy (poza pierwszym) wyraz powstaje poprzez pomonożenie przez pewną stałej, ustaloną liczbę q wyrazu poprzedniego:

$$a_1 \longrightarrow^{\cdot q} a_2 \longrightarrow^{\cdot q} a_3 \longrightarrow^{\cdot q} a_4 \longrightarrow^{\cdot q} \dots$$

Liczbę q nazywamy wtedy ilorazem ciągu geometrycznego.

Uwaga 11.2. Ciąg geometryczny może być skończony bądź nieskończony. Jeśli jest to ciąg nieskończony to:

$$\text{dla każdego } n \in \mathbb{N}_+ \qquad a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Jeśli ciąg jest skończony i ma powiedzmy k wyrazów, to:

$$\text{dla każdego n=1,2,3,\dots,k-1} \qquad a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

11.2 Własności ciągu geometrycznego

Fakt 11.3. *Dla ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q wzór ogólny ciągu ma postać:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Problem 11.4. Czy potrafisz udowodnić powyższy fakt? (Wskazówka: przeprowadź dowód indukcyjny).

Fakt 11.5. *Ciąg jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy gdy jest dany wzorem funkcji wykładniczej.*

Fakt 11.6. *Ogólnie, ciąg* (a_n) *jest geometryczny, gdy dla każdego* n *zachodzi:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad \textit{iloraz jest stały (tzn. nie zależy od } n\textit{).}$$

Uwaga 11.7. Trzy liczby a, b, c (przy założeniu $a \neq 0 \wedge b \neq 0$) tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}.$$

A stąd wynika wzór:

$$b^2 = a \cdot c.$$

Fakt 11.8. *Każdy wyraz ciągu geometrycznego, oprócz pierwszego i ostatniego (o ile taki istnieje) ma tę własność, że jego kwadrat jest równy iloczynowi wyrazów sąsiednich:*

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}.$$

Fakt 11.9. *Jeżeli wyrazy ciągu geometrycznego są nieujemne, to każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego i ostatniego (o ile taki istnieje) jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:*

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}.$$

Przykład 11.10. Ciąg dany wzorem ogólnym $a_n = 7 \cdot 10^n$ jest ciągiem geometrycznym, bo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7 \cdot 10^{n+1}}{7 \cdot 10^n} = 10.$$

Natomiast ciąg $a_n = 1 + 10^n$ nie jest ciągiem geometrycznym gdyż:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + 10^{n+1}}{1 + 10^n} \text{ nie jest stałe.}$$

Fakt 11.11 (monotoniczność ciągu geometrycznego)**.** *Jeśli* $q > 1$ *to ciąg geometryczny jest monotoniczny:*

- *jeśli* $q > 1 \wedge a_1 > 0$ *lub jeśli* $1 > q > 0 \wedge a_1 < 0$, *to ciąg jest rosnący,*
- *jeśli* $q = 1 \vee q = 0$, *to ciąg jest stały,*
- *jeśli* $1 > q > 0 \wedge a_1 < 0$ *lub jeśli* $q > 1 \wedge a_1 < 0$, *to ciąg jest malejący.*

11.3 Suma ciągu geometrycznego

Fakt 11.12. *Suma k początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) jest równa:*

$$S_k = a_1 \frac{1-q^k}{1-q}.$$

Wzór jest poprawny gdy $q \neq 1$.

Uwaga 11.13. Oczywiście gdy $q = 1$, ciąg geometryczny jest ciągiem stałym i sumę k wyrazów liczymy z wzoru $S_k = k \cdot a_1$.

Przykład 11.14. Korzystając z danego wzoru, policzymy następującą sumę:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots + 1024 + 2048.$$

Zauważmy że dodawne liczby tworzą ciąg geometryczny $a_1, a_2, \ldots, a_n$, w którym $a_1 = 2$, $q = 2$, $a_n = 2048$. Aby obliczyć liczbę wyrazów tego ciągu wykorzystamy wzór:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Zatem:

$$2048 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$2048 = 2^n$$

$$n = 11$$

Stąd, szukana suma równa jest:

$$S_{11} = 2 \cdot \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2 \cdot \frac{1-2048}{1-2} = 2 \cdot 2047 = 4094.$$

Wskazówka: W czasie rozwiązywania zadań dotyczących ciągu geometrycznego, wszelkie „dane” i „szukane” przedstaw w postaci oznaczeń: a_1, q itp. Ułatwia to koncentrację i kojarzenie odpowiednich wzorów i relacji między wielkościami.

11.4 Zadania

Zadanie 11.1. Trójka liczb całkowitych tworzy ciąg geometryczny o ilorazie całkowitym. Gdy najmniejszą z nich zwiększymy o 9, to powstanie ciąg arytmetyczny. Jakie to liczby?

Zadanie 11.2. Piłka, odbijając się od ziemi osiąga za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{3}{5}$ poprzedniej. Jak wysoko wzniosła się piłka po pierwszym uderzeniu, jeśli po czwartym odbiła się na wysokość 27 cm?

Zadanie 11.3. Podaj wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach: $12, 4, \frac{4}{3}$.

Zadanie 11.4. Liczby b, c, d tworzą ciąg geometryczny. Wielomian: $W(x) = x^3 - bx^2 + cx + d$ jest podzielny przez $x^2 - 1$. Znajdź liczby b, c, d.

Zadanie 11.5. Trzy kolejne liczby tworzą ciąg geometryczny. Ich suma wynosi $3\frac{1}{2}$. Jeżeli do drugiej dodamy $\frac{1}{4}$, a pozostałe zostawimy bez zmiany, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Znajdź te liczby.

Zadanie 11.6. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 62, a iloczyn jest równy 1000. Wyznacz ten ciąg.

Zadanie 11.7. Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Znaleźć ten ciąg wiedząc, że suma wyrazów skrajnych jest równa 36, zaś suma wyrazów środkowych 24.

Zadanie 11.8. Między liczby 27 i $\frac{1}{3}$ wstaw trzy takie liczby, aby z danymi liczbami tworzyły ciąg geometryczny.

Zadanie 11.9. Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 93. Liczby te są równe odpowiednio pierwszemu, drugiemu i siódmemu wyrazowi ciągu arytmetycznego. Znajdź te liczby.

Zadanie 11.10. Trzy liczby x, y, z, których suma jest równa 26 tworzą ciąg geometryczny. Liczby x+1, y+6, z+3 tworzą ciąg arytmetyczny, Znajdź te liczby.

Zadanie 11.11. Między liczby 2 i 12 wstaw dwie liczby tak, aby trzy pierwsze tworzyły ciąg geometryczny, a trzy ostatnie ciąg arytmetyczny.

Zadanie 11.12 ($\star$). Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Iloczyn logarytmów dziesiętnych pierwszej i czwartej liczby wynosi 8, a iloczyn logarytmów drugiej i trzeciej liczby wynosi 0. Znajdź te liczby.

Zadanie 11.13 ($\star$). Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 62. Suma logarytmów dziesiętnych tych liczb jest równa 3. Wyznacz ten ciąg.

Zadanie 11.14. Wyznacz dwa ciągi: arytmetyczny a_1, a_2, a_3 i geometryczny b_1, b_2, b_3 takie, że:

$$a_1b_1 = 1, a_2b_2 = 4, a_3b_3 = 12, a_1 + a_2 + a_3 = 6.$$

11.5 Procent prosty i składany - elementy matematyki finansowej

Z ciągami spotykamy się często w życiu codziennym w sytuacjach związanych z lokatami bankowymi i kredytowymi. Wpłacając do banku kwotę pieniędzy na lokatę długoterminową, możemy mieć do czynienia z tzw. procentem prostym (stałym) lub składanym.

Załóżmy, że wpłacamy do banku kapitał k, oprocentowany na $p\%$ w stosunku rocznym.

Załóżmy, że odsetki nie są dopisywane do kapitału po upływie każdego roku, tzn. co roku procent p liczony jest od kwoty kapitału początkowego. Po roku oszczędzania, nasz kapitał wynisie $k(1+\frac{p}{100})$. W następnym roku, kapitał wyniesie: $k(1+\frac{p}{100}) + k \cdot \frac{p}{100} = k(1+\frac{2\cdot}{100})$. Ogólnie po upływie każdego roku do naszej lokaty dopisywana jest stała kwota wynosząca $k \cdot \frac{p}{100}$. Zauważmy, że mamy tu do czynienia z ciągiem arytemtycznym o wyrazie ogólnym $k_n = k(1+\frac{n \cdot p}{100})$. Taki sposób naliczania odesetek nazywamy procentem prostym (stałym).

Często jednak zdarza się, że co roku (lub z inną określoną częstotliwością), odsetki doliczane są do kapitału od którego liczony jest procent. Biorąc to pod uwagę, nasz kapitał po upływie roku równy jest (podobnie jak poprzednio) $k(1+\frac{p}{100})$. W następnym roku jednak, oprocentowaniu podlega już nowa kwota. Po dwóch latach stan konta równy jest $k(1+\frac{p}{100})^2$ i po każdym następnym roku zostaje pomnożony przez $(1+\frac{p}{100})$. Zauważamy wiec, że mamy tu do czynienia z ciągiem geometrycznym, którego n-tym wyrazem jest $k_n = k(1+\frac{p}{100})^n$. Taki sposób naliczania odsetek nazywany jest procentem składanym.

W matematyce finansowej, dopisywanie odsetek do podstawy kapitału od którego naliczane jest dalsze oprocentowanie nazya się kapitalizacją odsetek. W przypadku lokat, gdzie występuje opisana wyżej sytuacja z procentem składanym, odsetki są kapitalizowane z określoną częstotliwością (na przykład co roku). W przypadku procentu prostego, kapitalizacja odsetek następuje tylko raz, w momencie zakończenia oszczędznia.

W zaciąganych kredytach jest podobna sytuacja, z tą różnicą, że naliczane są odsetki za zwłokę.

Problem 11.15. Zastanów się, który ze sposobów naliczania odsetek jest bardziej opłacalny dla klienta banku, w przypadku lokat oszczędnościowych oraz kredytów.

Problem 11.16 ($\star$). Podane wzory na procent składany są poprawne w przypadku rocznej kapitalizacji odsetek. Zastanów się, jak należy je zmodyfikować, aby były poprawne dla dowolnej częstotliwości kapitalizacji odsetek wynoszącej m miesięcy. Pamiętaj, że oprocentowanie p podaje się zazwyczaj w skali roku.

Uwaga 11.17. Większość lokat bankowych stosuje procent składany do naliczania odsetek. Jeśli więc w zadaniu nie sprecyzowano jak naliczane są odsetki, należy przyjąć że chodzi o procent składany.

11.6 Zadania

Zadanie 11.15. Na lokatę terminową (18-miesięczną) wpłacono 5000 zł. Po 18 miesiącach, bank wypłacił 5495,52 zł. Ile (w skali roku) wynosiło oprocentowanie lokaty, jeśli bank kapitalizował odsetki co pół roku?